



کتابچه راهنما و خلاصه مقالات

نهمین سمینار تخصصی نظریه قابلیت اعتماد و کاربردهای آن

9th Seminar on Reliability Theory and its applications

Isfahan University of Technology
May 24-25
2023



Reliab9@iut.ac.ir
wodrdce.um.ac.ir

فهرست خلاصه مقالات فارسی

- به سوی بهبود مدل سازی احتمالی دقیق تحلیل درخت عیب فازی از طریق تابع مفصل و تعمیم تابع مفصل فازی بر پایه تی نرم دراستیک و کاربرد آن در ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم‌ها
- ۱۲ امینی مقدم، م
- تحلیل قابلیت اطمینان چند مؤلفه‌ای در توزیع‌های کوماراسوامی بهبودیافته
- ۲۷ پرفلک، آ.، کهن‌سال، ا.
- برآوردیابی برای توزیع وایبل بر اساس نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار ماکسیمم با نمونه‌های نابرابر تقوی دهاقانی، ف.ا.، کامل میرمصطفائی، س.م.ت.
- ۳۵
- استنباط آماری روی توزیع لوماکس تحت طرح سانسور توام پیشرونده نوع دوم متعادل شده
- ۴۵ رسولی، ع.، بهمنی، م
- مسئله بهینه‌سازی در سیستم‌های موازی با تعداد مؤلفه‌های ثابت و تصادفی
- ۵۵ زعیم زاده، م.، احمدی، ج.
- بررسی مدل تنش-مقاومت یک سیستم موازی با فرض وابستگی در مدل نرخ خطر معکوس متناسب
- ۶۵ قنبری، س.، رضایی رکن آبادی، ع.، صالحی، م.
- رتبه‌بندی ریسک‌ها بر پایه عدد اولویت ریسک
- ۷۸ محمودوند، ر.
- آسیب‌شناسی قرائت مصرف آب در شرکت آبفا با استفاده از رویکردهای داده‌کاوی
- ۸۶ معمری، ف.، محمودوند، ر.
- افزایش قابلیت اعتماد با اعمال روش کاهش روی دو مؤلفه‌ی سیستم
- ۹۳ ملائی‌نژاد، ع.، چهکندی، م.
- ارائه‌ی روش زنجیره‌ی مارکوف برای محاسبه‌ی قابلیت دسترسی سیستمی با قطعات افزوده و ساختار موازی تحت استراتژی مختلط
- ۱۰۰ نجفی جویباری، م.، زینل همدانی، ع.، ابویی اردکان، م.



به سوی بهبود مدل سازی احتمالی دقیق تحلیل درخت عیب فازی از طریق تابع مفصل و تعمیم تابع مفصل فازی بر پایه تی نرم دراستیک و کاربرد آن در ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم ها

امینی مقدم، م^۱

^۱ گروه آمار، دانشگاه صنعتی شاهرود

چکیده

در ارزیابی قابلیت اطمینان و تحلیل وابستگی اجزای سیستم بر پایه درخت عیب، تعمیمی از دروازه های کلاسیک نظیر دروازه های دینامیک و زمانی تعریف شده اند تا بتوانند وابستگی عملکردی و توالی های شکست اجزا سیستم و الزامات زمانی رویدادها را مدل سازی کنند. در این مقاله می خواهیم با استفاده از مفصل فازی و ساخت مفصل جدید بر پایه تی نرم دراستیک به تحلیل وابستگی اجزای سیستم در شرایطی که تنها داده های کیفی مانند نظرات یا تصمیمات خبرگان در دسترس باشند و از نظر زبانی توصیف می شوند و کاربرد آن در ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم ها بپردازیم.

کلمات کلیدی: متغیر فازی، تابع مفصل فازی، درخت عیب فازی، تی نرم دراستیک، تابع مفصل فازی بر پایه تی نرم دراستیک

۱ مقدمه ای بر درخت عیب

قابلیت اعتماد یک مفهوم بسیار مهم در یک اصطلاح چند وجهی است که شاخص های کارایی سیستم به اصطلاح RAMS^۱ شامل (۱) قابلیت اطمینان: تداوم خدمات صحیح، (۲) دسترس پذیری: آمادگی خدمات صحیح، (۳) نگهداشت پذیری و ضمانت: توانایی اصلاح و تعمیر، (۴) ایمنی: عدم وجود وقایعی که برای کاربر و محیط زیست

^۱m.amini.stat1983@gmail.com

^۱RAMS: Reliability, Availability, Maintainability, Safety

فاجعه بار باشد، را پوشش می‌دهد. چنین معیارهایی برای تعیین اینکه آیا یک سیستم با الزامات مورد نیاز خود مطابقت دارد یا اینکه آیا معیارهای اضافی مورد نیاز است یا خیر، حیاتی هستند. روش‌های تحلیل سیستم را می‌توان به دو دسته کلی روش‌های استقرایی و روش‌های قیاسی طبقه‌بندی کرد. تحلیل درخت عیب^۲ (FTA) یکی از تکنیک‌های بسیار قدرتمند و پرکاربرد در ارزیابی ایمنی و قابلیت اطمینان سیستم‌های پیچیده و روشی بسیار برجسته برای تحلیل خطرات مربوط به ایمنی و دارایی‌های مهم اقتصادی مانند نیروگاه‌ها، هواپیماها، مراکز داده و فروشگاه‌های اینترنتی است. روش‌های FTA شامل طیف گسترده‌ای از تکنیک‌های تحلیل و مدل‌سازی است که توسط طیف گسترده‌ای از ابزارهای نرم‌افزاری پشتیبانی می‌شوند. FTA نقش مهمی در صدور گواهینامه محصول و نشان دادن انطباق با الزامات قانونی دارد. درختان عیب یک استاندارد صنعتی، روش مدل‌سازی گرافیکی برای توصیف چگونگی انتشار شکست‌ها از طریق سیستم به عبارتی چگونگی تعامل اجزا برای ایجاد شکست‌های سرتاسر سیستم هستند.

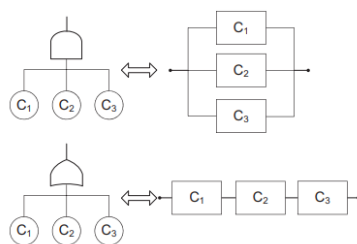
FTA اولین بار توسط واتسون در سال ۱۹۶۱ در آزمایشگاه‌های تلفن گراهام‌بل و به درخواست نیروی هوایی آمریکا برای مطالعات قابلیت اطمینان و ایمنی سیستم‌های موشکی بالستیک بین قاره‌ای طرح‌ریزی شد. در سال ۱۹۶۲، این روش در نیروی هوایی ایالات متحده بر روی سیستم کنترل پرتاب موشک اجرا شد. در سمپوزیوم ایمنی در سال ۱۹۶۵، با حمایت دانشگاه واشنگتن و شرکت بوئینگ، مقالات متعددی ارائه شد، که بیانگر مزایای تحلیل درختان عیب بود. از آن زمان تاکنون، روشهای مختلفی برای مدل‌سازی و ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم پیچیده از طریق FTA گزارش شده است. و سهم قابل توجهی در پیشرفت FTA با ایجاد الگوریتم‌ها و نرم‌افزارهایی برای حل درختان عیب حاصل شده است که به طور گسترده برای ارزیابی ایمنی سیستم، تشخیص عیب و پیش‌بینی، و نیز آنالیز قابلیت اطمینان سیستم‌های صنعتی، مانند راکتور هسته‌ای، هوافضا، انرژی الکتریکی، شیمی، مهندسی عمران، صنعت پتروشیمی، خطوط لوله و الکترونیک به کار می‌رود.

درخت عیب، یک روش کارا برای تشریح احتمال وقوع یک حادثه و برآورد عمر مفید یک سیستم است. سناریوی شکست در درخت عیب با ترکیبی از رویدادهای عیب موازی و یا متوالی نشان داده می‌شود که می‌تواند منجر به شکست سیستم در انجام عملکرد خود شود. تحلیل درخت عیب (FTA) یک روش قوی، دقیق و ساختاریافته است که مستلزم استفاده از قواعد خاص جبر بولی، منطق و نظریه احتمال است. بدین معنی که نشان‌دهنده اتصال منطقی رویدادهای پایه و میانی حاصل از رویداد ناخواسته موسوم به رویداد برتر است. FTA می‌تواند یا کیفی یا کمی یا هر دو باشد. تحلیل کیفی نیاز به تخصیص مقادیر احتمال به رویدادهای اساسی تعریف‌شده در منطق سیستم ندارد. یک جنبه مهم از تجزیه و تحلیل کیفی، تعیین مجموعه‌های برش مینیمال (MCSS) برای رویداد برتر با استفاده از منطق بولی است. یک مجموعه‌ی برش مینیمال کوچک‌ترین مجموعه از شکست‌های اولیه است که ممکن است باعث شکست سیستم شود. پس از به دست آوردن MCSS، FTA کمی را می‌توان برای برآورد احتمال رویداد برتر با استفاده از امکانات وقوع راستنمایی رویدادهای اساسی و جبرهای بولی انجام داد.

مشابه FTA، ما همچنین می‌توانیم از نمودارهای بلوک قابلیت اطمینان (RBD) برای تعیین ترکیب‌های مختلفی از موفقیت‌های مؤلفه‌ای که منجر به وضعیت یا سطح عملکرد خاصی از یک سیستم می‌شود، استفاده کنیم. بنابراین، RBD را می‌توان به عنوان یک روش قیاسی نیز در نظر گرفت. در ادامه مقایسه مختصری بین FTs و RBD ارائه می‌کنیم. اساسی‌ترین تفاوت بین FTs و RBD این است که یک RBD یک مدل موفقیت‌گرا است، در حالی که یک درخت عیب شکست‌گرا است. به‌طور خاص، در یک RBD، شخص در "فضای موفقیت" کار می‌کند و بنابراین به ترکیبات موفقیت سیستم نگاه می‌کند، در حالی که در درخت عیب در "فضای شکست" کار می‌کند و بنابراین به

^۲ Fault Tree Analysis

ترکیبات خرابی سیستم نگاه می‌کند. هر دو روش نتایج یکسانی خواهند داشت. اما در بیشتر کاربردها، به ویژه برای سیستم‌های حیاتی ایمنی، توصیه می‌شود که با ساختن FTs به جای RBD شروع کنید، زیرا تفکر در مورد خرابی‌ها اغلب علل بالقوه خرابی را نسبت به تفکر از دیدگاه عملکرد نشان می‌دهد. در بیشتر موارد، ممکن است FT را به RBD یا برعکس تبدیل کنیم. به‌ویژه، تبدیل برای تمام ساختارهای منسجم استاتیک امکان‌پذیر است. در تبدیل FT به RBD، از رویداد TOP درخت عیب شروع می‌کنیم و دروازه‌ها را به طور متوالی جایگزین می‌کنیم. یک AND-gate منطقی با ساختار موازی ورودی‌های دروازه و یک OR-gate با ساختار سری از ورودی‌های دروازه جایگزین می‌شود. در تبدیل از یک RBD به یک FT، یک ساختار موازی به عنوان یک درخت عیب نشان داده می‌شود که در آن تمام رویدادهای ورودی از طریق یک دروازه AND متصل می‌شوند، و یک ساختار سری به عنوان درخت عیب نشان داده می‌شود که در آن تمام رویدادهای ورودی از طریق یک دروازه OR به هم متصل می‌شوند. شکل ۱ رابطه بین FT و RBD را نشان می‌دهد. توجه داشته باشید که رویدادهای درخت عیب، رویدادهای شکست هستند. بلوک‌ها در RBD به این معنی است که اجزای نمایش داده شده توسط بلوک‌ها کار می‌کنند. FTA و RBD هر دو ماهیت تکاملی دارند، به این معنی که قابلیت‌های مدل‌سازی آن‌ها در صورت نیاز برای پشتیبانی از طیف گسترده‌ای از سناریوها افزایش می‌یابد. به‌عنوان مثال، با معرفی دروازه‌های جدید، FTA برای پشتیبانی از خرابی‌های وابسته به ترتیب افزایش می‌یابد. با این حال، RBDs برای پشتیبانی از این ویژگی‌های مدل‌سازی بهبود نیافته‌اند. به‌طور مشابه، برخی از پیشرفت‌های دیگر برای RBDs وجود دارد که در FTA در دسترس نیستند. از این رو، ممکن است یا عملی نیست که تمام FTs را به RBDs معادل پوشش دهیم.



شکل ۱: تبدیل بین RBDs و FTs

در تجزیه و تحلیل درخت عیب FTA، احتمال وقوع رویداد برتر تابعی از احتمال وقوع رویدادهای اساسی است. بنابراین، پیوندهای نامطمئن مطرح شده در ارزیابی قابلیت اطمینان رویداد اساسی، در نتیجه، عدم قطعیت در نتایج ایجاد می‌کند. دو نوع عدم قطعیت وجود دارد که ممکن است در ارزیابی‌های قابلیت اطمینان رویداد اساسی ایجاد شود؛ عدم قطعیت‌های تصادفی و معرفتی. عدم قطعیت تصادفی از تصادفی بودن داده‌ها ناشی می‌شود و می‌تواند توسط توزیع‌های احتمالی نمایش داده شود، عدم قطعیت معرفتی از دانش ناقص یا اطلاعات ناقص ناشی می‌شود و می‌تواند توسط مجموعه‌های فازی نمایش داده شود. تعدادی از محققان تحلیل درخت عیب فازی (FFTA) و گسترش‌های آن را برای تحلیل قابلیت اطمینان سیستم تحت محیط‌های نامعین توسعه داده‌اند. در FFTA، هنگامی که توزیع‌های احتمال رویدادهای اساسی ناشناخته هستند، خصوصیات قابلیت اطمینان رویدادهای اساسی با استفاده از داده‌های کیفی مانند نظرات یا قضاوت متخصص توصیف‌شده در زبان طبیعی / اصطلاحات زبانی مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. این اصطلاحات زبانی با استفاده از توابع عضویت اعداد فازی اندازه‌گیری می‌شود و قضاوت‌های متخصص را به صورت ریاضی بیان می‌کند.

در ادبیات به تفسیر در ارتباط با رفتارهای دینامیکی و وابستگی اجزای سیستم با استفاده از گسترش‌های درختان

عیب کلاسیک از جمله؛ درختان عیب دینامیک، زمانی و دورازه‌های متناظر با آن‌ها؛ دورازه‌های دینامیک و زمانی، پرداخته شده است. هدف از این مطالعه، تعیین کمیت عدم قطعیت معرفتی در FFTA و بدست آوردن نتایج دقیق با عدم قطعیت کم‌تر می‌باشد. می‌دانیم که محاسبات مبتنی بر T_w شکل اعداد فازی را حفظ می‌کند، به طور موثر عدم قطعیت را کاهش می‌دهد، و نتایج دقیق‌تری ارائه می‌دهد. بنابراین در این مقاله یک رویکرد TBFFTA برای انتشار و تعیین کمیت عدم قطعیت معرفتی در یک روش دقیق‌تر توسعه داده می‌شود. در این مقاله می‌خواهیم با استفاده از مفصل فازی و ساخت مفصل جدید بر پایه تی نرم دراستیک به تحلیل وابستگی اجزای سیستم در شرایط نادقیق و کاربرد آن در ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم‌ها پردازیم.

۲ مفاهیم و مقدمات

۱.۲ اعداد فازی

نظریه مجموعه‌های فازی توسط زاده [۱] در ارتباط با اطلاعات نادقیق، مبهم و تا حدی درست معرفی شد. یک مجموعه فازی مانند \tilde{A} از مجموعه مرجع X ، به صورت یکتا با تابع $\mu_{\tilde{A}(\cdot)} : X \rightarrow [0, 1]$ تعریف می‌شود که $\mu_{\tilde{A}(x)}$ نشان‌دهنده درجه عضویت x در مجموعه فازی \tilde{A} است. زیرمجموعه (معمولی) عناصری از X را که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه فازی \tilde{A} حداقل به بزرگی α ($0 < \alpha \leq 1$) باشد، α -برش \tilde{A} (یا مجموعه تراز α وابسته به \tilde{A}) گوئیم و با \tilde{A}_α به صورت $\tilde{A}_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ نشان می‌دهیم. مجموعه فازی \tilde{A} از \mathbb{R} را یک عددی فازی \tilde{A} (حقیقی) گوئیم هرگاه \tilde{A} نرمال، تک‌نمایی و محدب و نیم‌پیوسته بالایی باشد. یعنی یک عدد منحصر به فرد $x^* \in \mathbb{R}$ با $\mu_{\tilde{A}}(x^*) = 1$ وجود دارد و برای هر $\alpha \in [0, 1]$ ، \tilde{A}_α یک بازه بسته غیرتهی در \mathbb{R} است. این بازه توسط $\tilde{A}_\alpha = [\tilde{A}_\alpha^L, \tilde{A}_\alpha^U]$ که در آن $\tilde{A}_\alpha^L = \inf\{x : x \in \tilde{A}_\alpha\}$ و $\tilde{A}_\alpha^U = \sup\{x : x \in \tilde{A}_\alpha\}$ نشان داده شده است.

۲.۲ مقدمه‌ای بر تی نرم‌ها

از نظر ریاضی، یک نرم مثلثی که به طور خلاصه با t -norm یا T -norm بیان می‌شود نوعی عملیات دوتایی است که اغلب در حوزه فضاهاى متریک احتمالی، اما همچنین در زمینه‌های بسیار جالب دیگر، مانند منطق فازی، یا به طور کلی، در منطق چند ارزشی (MVL)^۴ استفاده می‌شود [۲]. یک T -norm یک تابع $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ است. به طوری‌که برای هر $x, y, z \in [0, 1]$ ویژگی‌های زیر برقرار است:

1. *Commutativity* : $T(x, y) = T(y, x)$
2. *Associativity* : $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$
3. *Monotonicity* : $T(x, y) \leq T(x, z)$ whenever $y \leq z$
4. *Boundary condition* : $T(x, 1) = x$

^۳Fuzzy Number

^۴Multi-Valued Logic

۳.۲ رده‌بندی و مثال‌هایی از تی‌نرم‌ها

نمونه‌هایی از T -norms و T -conorms معروف در [۳] که در آن هر T -norm و دوگان آن (از طریق نفی استاندارد) T -conorm مربوطه فهرست شده‌اند. جدول ۱ نمونه‌هایی گویا از T -norms را نشان داده است.

جدول ۱: جدول T -normها

	T-norm
<i>minimum (Godel) T_m</i>	$\min(x, y)$
<i>product T_p</i>	xy
<i>Lukasiewicz T_L</i>	$\max(x + y - 1, 0)$
<i>drastic T_d/T_w</i>	$\min(x, y)$ if $\max(x, y) = 1$, otherwise 0
<i>nilpotent minimum T_n</i>	$\min(x, y)$ if $x + y > 1$, otherwise 0
<i>Dubois – Prade T_{DP}^α</i>	$\frac{xy}{\max(x, y, \alpha)}$ for some $\alpha \in [0, 1]$
<i>Ali – Mikhail – Haq T_{AMH}^α</i>	$\frac{xy}{\alpha + (1-\alpha)(x+y-xy)}$ if $\max(x, y) > 0, \alpha \in [0, 1]$ 0 otherwise
<i>Clayton T_C^α</i>	$\max(x^\alpha + y^\alpha - 1, 0)^{\frac{1}{\alpha}}, 0 \neq \alpha \leq 1$
<i>Frank T_F^α</i>	$\log_\alpha(1 + \frac{(\alpha^x - 1)(\alpha^y - 1)}{\alpha - 1}), 0 < \alpha \neq 1$
<i>Yager T_Y^α</i>	$\max(1 - ((1-x)^\alpha + (1-y)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, 0), \alpha \geq 1$
<i>Mayor – Torrens T_{MT}^α</i>	$\max(x + y - \alpha, 0)$ if $0 \leq x, y \leq \alpha, \alpha \in [0, 1]$ $\min(x, y)$ otherwise
<i>Sugeno – Weber T_{SW}^α</i>	$\max(\frac{x+y-1+\alpha xy}{1+\alpha}, 0), \alpha \geq 0$
<i>Gumbel T_G^α</i>	$e^{-((-\ln(x))^\alpha + (-\ln(y))^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$ if $\min(x, y) > 0, \alpha \geq 1$ 0 otherwise
<i>Joe T_J^α</i>	$1 - ((1-x)^\alpha + (1-y)^\alpha - (1-x)^\alpha(1-y)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \alpha \geq 1$

گزاره ۱.۰۲. یک T -norm پیوسته T ارشمیدسی است اگر و تنها اگر یک مولد افزایشی داشته باشد، یعنی یک تابع اکیدا نزولی و پیوسته راست در صفر $t: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ با $t(0) = \infty, t(1) = 0$ به طوری که

$$T(x, y) = t^{(-1)}(t(x) + t(y))$$

که در آن $t^{-1}: [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ شبه معکوس t است که تعریف شده است به صورت

$$t^{(-1)}(x) = \begin{cases} t^{-1}(x) & \text{if } x \leq f(0), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

تابع t به عنوان یک مولد افزایشی T شناخته می‌شود. همه T -norms مولد افزایشی ندارند.

۴.۲ مقدمه‌ای بر مفصل و تابع توزیع توام و کاربردهای آن: رویکرد کلاسیک

در تئوری احتمال و آمار، مفصل [۴] یک توزیع احتمال چند متغیره است که توزیع احتمال حاشیه‌ای هر متغیر یکنواخت است. از مفصل‌ها برای توصیف وابستگی بین متغیرهای تصادفی استفاده می‌شود. در این بخش به بررسی مختصری از مفصل و خواص آن می‌پردازیم. یک مفصل یک تابع C از I^2 به I با ویژگی‌های زیر است:

$$C(u, 0) = C(0, v) = 0, \quad \forall u, v \in [0, 1], \quad .1$$

$$C(u, 1) = u, \quad C(1, v) = v, \quad \forall u, v \in [0, 1], \quad .2$$

$$C(u_2, v_2) + C(u_1, v_1) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) \geq 0, \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1], \quad v_1 \leq v_2, u_1 \leq u_2. \quad .3$$

فرض کنید H یک تابع توزیع توام دو متغیر تصادفی X و Y با توزیع‌های حاشیه‌ای F و G باشد. در این صورت مفصلی مانند C وجود دارد [۵] به‌طوریکه

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)), \quad \forall x, y \in [-\infty, \infty]. \quad (1)$$

علاوه بر این، اگر F و G توابع توزیع تجمعی پیوسته باشند، C منحصر به فرد است. برعکس، اگر C یک مفصل و F و G توابع توزیع هستند، تابع H تعریف شده توسط رابطه (۱) یک تابع توزیع توام با حاشیه‌های F و G است. علاوه بر این، اگر F^{-1} و G^{-1} به ترتیب معکوس F و G باشند. سپس برای هر $u, v \in I^2$

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \quad (2)$$

گزاره ۲.۲.۲. T -norms مینیم و لوکاسیویچ را در نظر بگیرید. $T_L, T_M : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ که در جدول ۱ تعریف شده‌اند. برای هر مفصل $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ برای این باور است که [۶]:

$$T_L \leq C \leq T_M \quad .1$$

.۲ C صعودی است

.۳ C خاصیت Lipschitz را با ثابت ۱ برآورده می‌کند، یعنی برای همه $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0, 1]$ رابطه زیر برقرار است:

$$|C(u, v) - C(u, v)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| \quad (3)$$

نتیجه ۱.۰.۲. نتیجه فوری گزاره ۲.۲ این است که هر مفصلی پیوسته است. سپس، هر مفصل شرکت‌پذیر یک T -norm پیوسته است. توجه داشته باشید که T -norm مینیم T_M و T -norm حاصلضرب هاماخر T_H ، هر دو مفصل هستند.

۵.۲ متغیرهای تصادفی فازی

موقعیت‌های زیادی در کاربردهای زندگی واقعی وجود دارد که در آن مقدار اختصاص داده شده به هر خروجی ممکن از یک آزمایش تصادفی را می‌توان با استفاده از یک مجموعه فازی توصیف کرد. از دیدگاه احتمالی، متغیرهای تصادفی فازی به عنوان بسط متغیرهای تصادفی معمولی برای مدل‌سازی چنین داده‌هایی معرفی شدند.

بنابراین، در زمینه آزمایش‌های تصادفی که نتایج آن‌ها اعداد (یا بردارها در \mathbb{R}^p) نیستند، اما به صورت غیر دقیق بیان می‌شوند، مفهوم متغیر تصادفی فازی مفید است. در این راستا، مفاهیم مختلفی از متغیر تصادفی فازی در ادبیات معرفی و بررسی شده است. فرض کنید که یک آزمایش تصادفی با یک فضای احتمال (Ω, \mathcal{A}, P) توصیف می‌شود، جایی که مجموعه‌ای از تمام نتایج ممکن آزمایش است، \mathcal{A} یک σ -جبر از زیر مجموعه‌های Ω و P یک اندازه‌گیری احتمال بر روی فضای قابل اندازه‌گیری (Ω, \mathcal{A}) است. حسامیان و چاچی [۷] با استفاده از مفهوم α -بدبینانه، نسخه اصلاح شده‌ای از تعریف رایج متغیر تصادفی فازی را به شرح زیر ارائه کردند.

تعریف ۱.۲. نگاشت مقدار فازی $\tilde{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ یک متغیر تصادفی فازی نامیده می‌شود اگر برای هر $\alpha \in [0, 1]$ ، نگاشت مقدار حقیقی $\tilde{X}_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ یک متغیر تصادفی با مقدار حقیقی در (Ω, \mathcal{A}, P) است. دو متغیر تصادفی فازی \tilde{X} و \tilde{Y} مستقل هستند اگر \tilde{X}_α و \tilde{Y}_α مستقل باشند، برای همه $\alpha \in [0, 1]$. علاوه بر این، دو متغیر تصادفی فازی \tilde{X} و \tilde{Y} به طور یکسان توزیع می‌شوند اگر \tilde{X}_α و \tilde{Y}_α برای همه $\alpha \in [0, 1]$ ، به طور یکسان توزیع شده باشند. در نتیجه، گفته می‌شود که $\mathbf{X} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$ یک نمونه تصادفی فازی است اگر \tilde{X}_i ها مستقل و به طور یکسان توزیع شده باشد [۸].

۳ مفصل فازی

این بخش متداول‌ترین مفصل‌های مورد استفاده را بر اساس متغیرهای تصادفی فازی گسترش می‌دهد. در این راستا، نیاز به گسترش مفهوم تابع توزیع توام تجمعی برای دو متغیر تصادفی فازی وجود دارد. برای این منظور، رنجبر و حسامیان [۸] از رویکردی مشابه [۷] برای گسترش مفهوم تابع توزیع مشترک تجمعی استفاده می‌کنند. شایان ذکر است که [۷] مفهومی از تابع توزیع تجمعی فازی یک متغیر تصادفی فازی با α -برش‌های زیر پیشنهاد کردند:

$$\tilde{F}_{\tilde{X}}(x)[\alpha] = [P(\tilde{X}_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq x), P(\tilde{X}_{\frac{\alpha}{2}} \leq x)]$$

از مفهوم تابع توزیع تجمعی فازی برای ساخت یک آزمون فرضیه کولموگروف-اسمیرنوف فازی برای متغیرهای تصادفی فازی استفاده شده است [۷]. اکنون با الهام از روش فوق، یک تابع توزیع تجمعی مشترک فازی بین دو متغیر تصادفی فازی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۸].

تعریف ۱.۳. توزیع توام تجمعی فازی دو متغیر تصادفی فازی \tilde{X} و \tilde{Y} در $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ به صورت مجموعه فازی $\tilde{H}(x, y)$ با α -برش زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{H}(x, y)[\alpha] = [H_{\tilde{X}_{1-\frac{\alpha}{2}}, \tilde{Y}_{1-\frac{\alpha}{2}}}(x, y), H_{\tilde{X}_{\frac{\alpha}{2}}, \tilde{Y}_{\frac{\alpha}{2}}}(x, y)]$$

که در آن برای همه $\alpha \in [0, 1]$

$$H_{\tilde{X}_\alpha, \tilde{Y}_\alpha}(x, y) = P(\tilde{X}_\alpha \leq x, \tilde{Y}_\alpha \leq y)$$

تعریف ۲.۳. $\tilde{F}_{\tilde{X}}(x)$ توزیع حاشیه ای فازی $\tilde{H}(x, y)$ است اگر $\tilde{F}_{\tilde{X}}(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{H}(x, y)$ یعنی $(\tilde{F}_{\tilde{X}}(x))_\alpha = \lim_{y \rightarrow \infty} (\tilde{H}(x, y))_\alpha = 0$ برای هر $\alpha \in [0, 1]$.

لم ۱.۳. فرض کنید $\tilde{H}(x, y)$ توزیع توام تجمعی فازی دو متغیر تصادفی فازی \tilde{X} و \tilde{Y} در $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ باشد. سپس، $\tilde{F}_{\tilde{X}}(x)$ و $\tilde{G}_{\tilde{Y}}(y)$ به ترتیب توزیع های حاشیه ای فازی $\tilde{H}(x, y)$ هستند.

لم ۲.۳. اگر متغیرهای تصادفی فازی \tilde{X} و \tilde{Y} متغیرهای تصادفی فازی مستقل هستند، آنگاه $\tilde{H}(x, y) = F_{\tilde{X}}(x) \otimes G_{\tilde{Y}}(y) \forall x, y$.

قضیه ۱.۳. فرض کنید \tilde{X} و \tilde{Y} دو متغیر تصادفی فازی با تابع توزیع تجمعی فازی $\tilde{H}(x, y)$ باشند. سپس برای هر $\alpha \in [0, 1]$

یک مفصل C وجود دارد به طوری که

$$\tilde{H}(x, y)_\alpha = C((\tilde{F}_{\tilde{X}}(x))_\alpha, (\tilde{G}_{\tilde{Y}}(y))_\alpha)$$

نکته ۱.۳. فرض کنید \tilde{X} و \tilde{Y} متغیرهای تصادفی فازی هستند. با توجه به قضیه ۱.۲، تابع مفصل فازی دو متغیر تصادفی فازی \tilde{X} و \tilde{Y} در I^2 یک عدد فازی با α -برش زیر است:

$$\tilde{C}(u, v)[\alpha] = \left[H \left((\tilde{F}^{-1}(u))_{\frac{\alpha}{\varphi}}, (\tilde{G}^{-1}(v))_{\frac{\alpha}{\varphi}} \right), H \left((\tilde{F}^{-1}(u))_{1-\frac{\alpha}{\varphi}}, (\tilde{G}^{-1}(v))_{1-\frac{\alpha}{\varphi}} \right) \right]$$

نتیجه ۱.۳. $\tilde{C}(u, v)$ یک تابع توزیع توام فازی است.

گزاره ۱.۳. اگر $\tilde{C}(u, v)$ یک مفصل فازی باشد، سپس در شرایط زیر برقرار می‌شود:

$$\tilde{C}(u, \cdot) = \tilde{C}(\cdot, v) = I(\{\cdot\}), \quad \forall u, v \in I, \quad .1$$

$$\tilde{C}(u, 1) = u, \quad \tilde{C}(1, v) = v, \quad \forall u, v \in I, \quad .2$$

$$\tilde{C}(u_r, v_r) \oplus \tilde{C}(u_1, v_1) \geq \tilde{C}(u_1, v_r) \oplus \tilde{C}(u_r, v_1), \quad \forall u_1, u_r, v_1, v_r \in I, \quad v_1 \leq v_r, u_1 \leq u_r. \quad .3$$

لم ۳.۳. فرض کنید \tilde{X} و \tilde{Y} متغیرهای تصادفی فازی پیوسته با تابع مفصل \tilde{C} باشند. سپس \tilde{X} و \tilde{Y} مستقل هستند اگر و فقط اگر $\tilde{C}(u, v) = \tilde{u} \otimes \tilde{v}$.

۴ برخی از معیارهای وابستگی فازی

در این بخش، برخی از معیارهای ارتباط بین دو متغیر تصادفی فازی بر اساس مفصل فازی پیشنهادی گسترش می‌یابد. برای انجام این کار، ρ اسپیرمن، τ کندال و شاخص تطابق جینی به عنوان سه معیار رایج وابستگی بر اساس مفصل فازی بسط می‌یابند [۸].

تعریف ۱.۴. (ρ اسپیرمن فازی) فرض کنید \tilde{X} و \tilde{Y} دو متغیر تصادفی فازی با مفصل فازی \tilde{C} باشند. ضریب همبستگی اسپیرمن فازی بین \tilde{X} و \tilde{Y} به صورت یک عدد فازی با α -برش زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\rho}_s[\alpha] = [\tilde{\rho}_\alpha^L, \tilde{\rho}_\alpha^U]$$

که در آن

$$\tilde{\rho}_\alpha^L = \inf_{\beta \in I_\alpha} \left\{ 12 \int \int_{I^2} (\tilde{C}(u, v))_\beta dudv - 3 \right\}$$

$$\tilde{\rho}_\alpha^U = \sup_{\beta \in I_\alpha} \left\{ 12 \int \int_{I^2} (\tilde{C}(u, v))_\beta dudv - 3 \right\}$$

به طوری که $(\tilde{C}(u, v))_\beta$ مقدار β -بدینانه تابع مفصل فازی $\tilde{C}(u, v)$ و $I_\alpha = [\frac{\alpha}{\varphi}, 1 - \frac{\alpha}{\varphi}]$ است.

تعریف ۲.۴. (τ) کندال فازی) فرض کنید \tilde{X} و \tilde{Y} دو متغیر تصادفی فازی با مفصل فازی \tilde{C} باشند. τ کندال فازی \tilde{X} و \tilde{Y} به صورت یک عدد فازی با $-\alpha$ برش زیر تعریف می شود:

$$\tilde{\tau}_k[\alpha] = [\tilde{\tau}_\alpha^L, \tilde{\tau}_\alpha^U]$$

که در آن

$$\tilde{\tau}_\alpha^L = \inf_{\beta \in I_\alpha} \left\{ 12 \int \int_{I^2} (\tilde{C}(u, v))_\beta \tilde{c}_\beta(u, v) dudv - 1 \right\}$$

$$\tilde{\tau}_\alpha^U = \sup_{\beta \in I_\alpha} \left\{ 12 \int \int_{I^2} (\tilde{C}(u, v))_\beta \tilde{c}_\beta(u, v) dudv - 1 \right\}$$

در این فرمول، $\tilde{c}_\beta(u, v)$ مشتق جزئی مرتبه دوم برای مقدار β -بدبینانه تابع مفصل فازی \tilde{C} است که عبارت است از:

$$\tilde{c}_\beta(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u, \partial v} (\tilde{C}(u, v))_\beta \quad \forall \beta \in [0, 1] \quad (4)$$

تعریف ۳.۴. (معیار همخوانی جینی فازی) فرض کنید \tilde{X} و \tilde{Y} دو متغیر تصادفی فازی با مفصل فازی \tilde{C} باشند. معیار همخوانی جینی فازی \tilde{X} و \tilde{Y} یک عدد فازی با تابع عضویت زیر است:

$$\tilde{\gamma}_g[\alpha] = [\tilde{\gamma}_\alpha^L, \tilde{\gamma}_\alpha^U]$$

که در آن

$$\tilde{\gamma}_\alpha^L = \inf_{\beta \in I_\alpha} \left\{ 12 \int \int_{I^2} (|u+v-1| - |u-v|) \tilde{c}_\beta(u, v) dudv \right\}$$

$$\tilde{\gamma}_\alpha^U = \sup_{\beta \in I_\alpha} \left\{ 12 \int \int_{I^2} (|u+v-1| - |u-v|) \tilde{c}_\beta(u, v) dudv \right\}$$

تذکر ۱.۴. $-\alpha$ برش هایی که در این بخش از معیارهای همبستگی فازی برای همه $\alpha \in [0, 1]$ به دست می آیند، اندازه گیری همبستگی دو متغیر تصادفی غیرفازی هستند، بنابراین در حالت غیرفازی ویژگی یکسانی دارند. به عنوان مثال، برای ρ اسپیرمن فازی، به راحتی می توان تأیید کرد که:

$$1. \quad \tilde{\rho}_s(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{\rho}_s(\tilde{Y}, \tilde{X})$$

$$2. \quad \tilde{\rho}_s(\tilde{X}, \tilde{Y}) = I\{1\} \text{ که در آن } I \text{ تابع نشانگر را نشان می دهد.}$$

$$3. \quad -1 \leq \tilde{\rho}_s(\tilde{X}, \tilde{Y}) \leq 1$$

به طور مشابه این ویژگی ها برای $\tilde{\tau}_k$ و $\tilde{\gamma}_g$ صدق می کند.

۵ مفصل های تولید شده توسط یک تابع تغییر شکل

در این بخش مفصل به کار برده شده برای روش پیشنهادی را تعریف می کنیم [۵].

تعریف ۱.۵. تابع $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ را یک تابع تغییر شکل (دگرگون شده) نامند اگر

$$1. \quad g(1) = 1; g(0) = 0$$

۲. $g(t)$ ، مقعر است

۳. $g(t)$ ، در t صعودی است

اگر $F(x)$ یک تابع توزیع باشد آنگاه $\mathcal{F}(x) = g(F(x))$ نیز یک تابع توزیع است. اگر $H(x, y)$ یک توزیع توام باشد آنگاه $\mathcal{H}(x, y) = g(H(x, y))$ نیز یک تابع توزیع توام می‌باشد. با حاشیه‌های زیر

$$\begin{cases} H_1(x) = H(x, +\infty) \\ H_2(x) = H(+\infty, y) \end{cases} \implies \begin{cases} \mathcal{H}_1(x) = g(H_1(x)) \\ \mathcal{H}_2(x) = g(H_2(x)) \end{cases}$$

حال برای محاسبه مفصل متناظر داریم

$$\text{inverse method} \begin{cases} \mathcal{C}(U, V) = \mathcal{H}(\mathcal{H}_1^{-1}(U), \mathcal{H}_2^{-1}(V)) \\ C(U, V) = H(H_1^{-1}(U), H_2^{-1}(V)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(U, V) &= \mathcal{H}(\mathcal{H}_1^{-1}(U), \mathcal{H}_2^{-1}(V)) & (5) \\ &= g(H(\mathcal{H}_1^{-1}(U), \mathcal{H}_2^{-1}(V))) \\ &= g(C(H_1(\mathcal{H}_1^{-1}(U)), H_2(\mathcal{H}_2^{-1}(V)))) \\ &= g(C(g^{-1}(U), g^{-1}(V))) \end{aligned}$$

$$C_g(U, V) = \mathcal{C}(U, V) = g(C(g^{-1}(U), g^{-1}(V))) \quad (6)$$

یعنی با داشتن مفصل پایه $C(U, V)$ و یک g می‌توان یک مفصل جدید ساخت.

۶ روش پیشنهادی

در این مقاله می‌خواهیم با استفاده از مفصل تولید شده در بخش ۵ و به کمک تی‌نرم دراستیک با ساخت یک مفصل جدید به تحلیل درخت عیب فازی و وابستگی اجزای سیستم و کاربرد آن در ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم‌ها بپردازیم.

۱.۶ تحلیل درخت عیب فازی بر پایه تی‌نرم دراستیک

اگرچه محاسبات جبری بین اعداد فازی دارای مزیت‌های فراوانی است، با این وجود در سیستم‌های بزرگ صنعتی علاوه بر پیچیدگی محاسباتی، به دلیل تعدد عملگرهای جبری و به طور ویژه عملگر ضرب، میزان ابهام در خروجی نهایی بسیار بیشتر از میزان ابهام واقعی است. از این رو، تجزیه و تحلیل قابلیت اطمینان سیستم ممکن است به شدت تحت تاثیر قرار گیرد. استفاده از تی‌نرم دراستیک و ویژگی‌های منحصر بفرد آن نشان می‌دهد که هر دو ضعف ذکر شده در اثر به کارگیری این تی‌نرم برطرف شده و نتایج دارای دقت و سرعت چشمگیری بوده‌اند. خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند به مراجع [۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴] مراجعه نمایند.

تجزیه و تحلیل درخت عیب (FTA)^۵ به عنوان یک ابزار تشخیصی قدرتمند شناخته می‌شود که از قرن بیستم تاکنون یکی از مهم‌ترین روش‌های دانش محور بوده است. این یک روش قیاسی است که در آن ترکیبی از خطاهای سیستم و خطاهای انسانی را می‌توان تعیین کرد. به طور کلی، تجزیه و تحلیل‌های FTA به دو سطح کیفی و کمی طبقه‌بندی می‌شوند. در تحلیل کیفی، شبکه‌های درخت به مجموعه‌های برش مینیمال متشکل از کوچک‌ترین ترکیب‌هایی از رویدادهای اساسی برای ایجاد رویداد برتر منتقل می‌شوند. در تجزیه و تحلیل کمی، تخمین مقدار (FP)^۶ برای (TE)^۷ و سایر شاخص‌ها معیارهای اهمیت را نشان می‌دهند که به صورت ریاضی محاسبه می‌شوند. پس از طراحی ساختار FTA، نتایج می‌تواند برخی از شاخص‌ها را در مورد قابلیت اطمینان سیستم ارائه دهد و تحلیلگر را قادر می‌سازد تا تعیین کند که کدام واحد از یک سیستم در معرض خطر فوری هستند. بنابراین، اقدامات اصلاحی می‌تواند برای چنین واحدهای حیاتی سازگار باشد. در واقع، تکنیک FTA نشان می‌دهد که چگونه خرابی واحدها، خطای انسانی یا عوامل محیطی می‌تواند منجر به خرابی سیستم شود. علاوه بر این، FTA به طور منظم برای بهبود کیفیت و دسترس‌پذیری محصول از طریق جلوگیری از خرابی‌های غیرمنتظره با استفاده از فعالیت‌های تعمیر و نگهداری مناسب در سیستم‌های مختلف صنعتی انجام می‌شود. اگرچه فرمول‌های ریاضی برای کمی کردن عملگرهای AND و OR که رویدادها را در مجموعه برش‌ها پیوند می‌دهند در دسترس هستند، اینها فقط برای مقادیر غیرفازی مناسب هستند. به همین دلیل لازم است عملگرهای فازی برای دروازه‌های منطقی تعریف شوند [۱۵].

• عملگر فازی دروازه AND: اگر احتمال شکست یک رویداد i توسط یک عدد فازی مثلثی به صورت $\tilde{P}_i(t) = (a_i(t), b_i(t), c_i(t))$ ارائه شده باشد، قاعده حاصلضرب فازی می‌تواند برای تعیین خروجی یک دروازه AND بولی به کار برده شود زمانی که وقوع احتمالی ورودی‌های آن با احتمالات فازی نمایش داده شوند. آنگاه عملگر فازی برای دروازه AND به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$P_{FAND} = AND_F \{P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)\} = \prod_{i=1}^n P_i(t) = \left(\prod_{i=1}^n a_i, \prod_{i=1}^n b_i, \prod_{i=1}^n c_i \right) \quad (۷)$$

• عملگر فازی دروازه OR: قاعده متمم فازی می‌تواند برای تعیین کمیت خروجی یک دروازه OR بولی به کار برده شود زمانی که وقوع احتمالی ورودی‌های آن با احتمالات فازی نمایش داده شوند. عملگر فازی برای دروازه OR به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$P_{FOR} = OR_F \{P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)\} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_i(t)) = \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - a_i(t)), 1 - \prod_{i=1}^n (1 - b_i(t)), 1 - \prod_{i=1}^n (1 - c_i(t)) \right) \quad (۸)$$

دروازه‌های فوق دروازه‌های کلاسیک درختان عیب استاتیک هستند. برای مدل‌سازی رفتارهای دینامیکی سیستم‌های دینامیک، دروازه‌های دینامیکی نظیر دروازه وابستگی عملکردی (FDEP)^۸، دروازه قطعات یدکی (SPARE)^۹،

^۵Faut Tree Analysis

^۶Failure Probability

^۷Top Event

^۸Functional Dependency Gate

^۹Spare Gate

دروازه اجرای توالی (SEQ)^{۱۰}، دروازه AND اولویت دار (PAND)^{۱۱} برای درختان عیب دینامیک (DFTs)^{۱۲} و برای به تصویر کشیدن الزامات زمانی رویدادها، علاوه بر دروازه AND اولویت دار، دروازه‌های زمانی دیگر نظیر دروازه OR اولویت دار (POR)^{۱۳} و دروازه AND هم‌زمان (SAND)^{۱۴} برای درختان عیب زمانی پاندورا (Pandora TFTs)^{۱۵} بسط داده شدند. خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند برای اطلاع بیشتر به مراجع [۱۶، ۱۷] مراجعه نمایند.

۲.۱.۶ ارزیابی احتمال فازی رویداد برتر با استفاده از محاسبات مبتنی بر T_w

بعد از به دست آوردن احتمالات فازی تمامی رویدادهای اساسی، این مقادیر را می‌توان برای ارزیابی احتمال فازی رویداد برتر مورد استفاده قرار داد. عملیات ریاضی فازی مبتنی بر T_w برای ارزیابی احتمالات فازی MCSs و نیز برای احتمال فازی رویداد برتر بکار برده می‌شوند. مجموعه‌ای از MCSs از یک عیب سیستم را می‌توان مانند $S = \{C_i : i = 1, 2, \dots, m\}$ تعریف کرد، که در آن C_i ، i -امین مجموعه برش مینیمال مرتبه k است و مانند $C_i = b_1, b_2, \dots, b_k$ تعریف شده است. فرض کنید که احتمال فازی \tilde{p}_j از رویداد $j : j = 1, 2, \dots, n$ توسط عدد فازی مثلثی (a_j, α_j, β_j) نشان داده شده است، سپس احتمال فازی \tilde{P}_{C_i} از مجموعه برش مینیمال C_i با استفاده از عبارات زیر برآورده می‌شود [۱۸]:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{C_i} &= AND_{fuzzy}\{\tilde{P}_{C_1}, \tilde{P}_{C_2}, \dots, \tilde{P}_{C_k}\} \\ &= \bigotimes_{i=1}^k \tilde{P}_{C_i} = \tilde{P}_{C_1} \otimes \tilde{P}_{C_2} \otimes \dots \otimes \tilde{P}_{C_k} \\ &= \left(\prod_{j=1}^k a_j, \max_{1 \leq i \leq k} \left(\alpha_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k a_j \right), \max_{1 \leq i \leq k} \left(\beta_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k a_j \right) \right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{C_i} &= OR_{fuzzy}\{\tilde{P}_{C_1}, \tilde{P}_{C_2}, \dots, \tilde{P}_{C_k}\} \\ &= 1 \ominus \bigotimes_{i=1}^k (1 \ominus \tilde{P}_{C_i}) = 1 \ominus (1 \ominus \tilde{P}_{C_1}) \otimes (1 \ominus \tilde{P}_{C_2}) \otimes \dots \otimes (1 \ominus \tilde{P}_{C_k}) \\ &= \left(1 - \prod_{j=1}^k (1 - a_j), \max_{1 \leq i \leq k} \left(\alpha_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (1 - a_j) \right), \max_{1 \leq i \leq k} \left(\beta_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (1 - a_j) \right) \right) \end{aligned} \quad (10)$$

از این رو، احتمال فازی \tilde{P}_T رویداد برتر را می‌توان با استفاده از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\tilde{P}_T = 1 \ominus \bigotimes_{i=1}^m (1 \ominus \tilde{P}_{C_i}) = 1 \ominus (1 \ominus \tilde{P}_{C_1}) \otimes (1 \ominus \tilde{P}_{C_2}) \otimes \dots \otimes (1 \ominus \tilde{P}_{C_m}) \quad (11)$$

^{۱۰} Sequence Enforcing Gate

^{۱۱} Priority-AND Gate

^{۱۲} Dynamic Fault Tree

^{۱۳} Priority-OR Gate

^{۱۴} Simultaneous-AND

^{۱۵} Pandora Temporal Fault Trees

۲.۶ معرفی و ساخت مفصل فازی بر پایه T_w با تعمیم تابع مفصل احتمال رویداد برتر درخت عیب فازی

و نهایتاً نوآوری و کاربرد تابع مفصل در درخت عیب برای ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم در این بخش عنوان می‌شود. در واقع با استفاده از بخش ۵ در تعریف ۱.۶، مبحث قابلیت اطمینان و ارتباط تابع توزیع متغیر تصادفی طول عمر با تابع توزیع جدید را بیان می‌کنم. و در تعریف ۲.۶ تابع مفصل فازی احتمال رویداد برتر درخت عیب فازی و تعمیم آن از طریق تی‌نرم دراستیک برای ساخت مفصل فازی جدید و کارایی آن در ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم‌ها را معرفی می‌کنم.

تعریف ۱.۶. اگر $F(t)$ تابع توزیع طول عمر متغیر تصادفی T باشد آنگاه $\mathcal{F}(t) = g(F(t))$ نیز یک تابع توزیع است. اگر $F(t_1, t_2)$ یک توزیع توأم باشد آنگاه $\mathcal{F}(x, y) = g(F(t_1, t_2))$ نیز یک تابع توزیع توأم می‌باشد.

تعریف ۲.۶. اگر تابع مفصل فازی k متغیره احتمال رویداد برتر درخت عیب فازی را

$$\tilde{C} = \tilde{C}_{FPFTA}(t_1, t_2, \dots, t_k)$$

و تابع g را عملگر تی‌نرم دراستیک در نظر بگیریم آنگاه تابع مفصل فازی جدید احتمال رویداد برتر درخت عیب فازی مبتنی بر تی‌نرم دراستیک را به صورت ذیل تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{C} = \tilde{C}_{TBFFTA}(t_1, t_2, \dots, t_k)$$

بنابراین داریم:

$$\tilde{C}_{T_w}(t_1, t_2, \dots, t_k) = \tilde{C}(t_1, t_2, \dots, t_k) = T_w(\tilde{C}(T_w^{-1}(t_1), T_w^{-1}(t_2), \dots, T_w^{-1}(t_k))) \quad (12)$$

با استفاده از تابع مفصل‌های فازی تعریف شده می‌توان به تحلیل دقیق وابستگی اجزای سیستم و نهایتاً ارزیابی دقیق‌تر قابلیت اطمینان سیستم‌ها پرداخت. متعاقباً کاربرد روش پیشنهادی در مطالعه آینده بر روی سیستم واقعی پیاده‌سازی خواهد شد.

۷ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا روش تحلیل درخت عیب فازی برای تجزیه و تحلیل سیستم‌های پیچیده صنعتی که امکان خرابی رخدادهای پایه و اصلی آن دارای عدم قطعیت است مورد مطالعه قرار گرفت. در بخش بعد، مقدمات و مفاهیمی از تابع توزیع توأم دو متغیر تصادفی فازی، تابع مفصل فازی و معیارهای وابستگی فازی تعریف شد. سپس برای ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم‌ها، تحلیل درخت عیب فازی مبتنی بر تی‌نرم دراستیک ارائه گردید. و نهایتاً با استفاده از ساخت مفصل توسط یک تابع تغییر شکل، تابع مفصل احتمال رویداد برتر درخت عیب فازی و همچنین تابع مفصل فازی جدید بر پایه تی‌نرم دراستیک معرفی شد. کاربرد روش پیشنهادی و گسترش سایر استدلال‌های آماری مفصل فازی در حوزه قابلیت اطمینان از برخی از موضوعات بالقوه برای مطالعات آینده است.

- [1] Zadeh, L. A. *Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility*, Fuzzy Sets and Systems, vol. 100, pp. 9-34, 1999/011011 1999.
- [2] Garrido, Angel, *Triangular Norms, Triangular Conorms, and Some Related Concepts*, BRAIN. Broad Research in Artificial Intelligence and Neuroscience, 2, 59–62, 2011.
- [3] Wu, Chai Wah, *On rearrangement inequalities for T-norm logics*, arXiv preprint arXiv:2204.06051, 2022
- [4] Sklar M, *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*. Université Paris 8, Saint-Denis, 1959.
- [5] Nelsen RB, *An introduction to copulas*. Springer, New York, 2006.
- [6] Dimuro, Graçaliz Pereira et al, *CMin-Integral: A Choquet-Like Aggregation Function Based on the Minimum t-Norm for Applications to Fuzzy Rule-Based Classification Systems*, Aggregation Functions in Theory and in Practice, 83-95, 2018.
- [7] Hesamina G, Chachi, J, *Two-sample Kolmogorov-Smirnov fuzzy test for fuzzy random variables*, Stat Pap 56:61–82, 2015.
- [8] Ranjbar, V., Hesamian, G., *Copula function for fuzzy random variables: applications in measuring association between two fuzzy random variables*, Statistical Papers, 61, 503-522, 2020.
- [9] Dug Hun Hong and Hae Young Do. *Fuzzy system reliability analysis by the use of (the weakest t-norm) on fuzzy number arithmetic operations*. Fuzzy Sets and Systems, 90(3):307–316, 1997
- [10] Hong, Dug Hun. *Shape preserving multiplications of fuzzy numbers*. Fuzzy Sets and Systems, 123(1):81–84, 2001.
- [11] Hong, Dug Hun. *On shape-preserving additions of fuzzy intervals*. Journal of Mathematical Analysis and applications, 267(1):369–376, 2002.
- [12] Kumar, Mohit. *Applying weakest t-norm based approximate intuitionistic fuzzy arithmetic operations on different types of intuitionistic fuzzy numbers to evaluate reliability of pcba fault*. Applied Soft Computing, 23:387–406, 2014.
- [13] Kumar, Mohit and Yadav, Shiv Prasad. *The weakest t-norm based intuitionistic fuzzy fault-tree analysis to evaluate system reliability*. ISA Transactions, 51(4):531–538, 2012.
- [14] Lin, Kuo-Ping, Wen, Wu, Chou, Chang-Chien, Jen, Chih-Hung, and Hung, KuoChen. *Applying fuzzy gert with approximate fuzzy arithmetic based on the weakest t-norm operations to evaluate repairable reliability*. Applied Mathematical Modelling, 35(11):5314–5325, 2011.

- [15] Mahmood, Y. A et al, *Fuzzy fault tree analysis: a review of concept and application*, International Journal of System Assurance Engineering and Management, 4, 19-32, 2013.
- [16] S. Kabir, E. Edifor, M. Walker, and N. Gordon, *Quantification of temporal fault trees based on fuzzy set theory*, Adv. Intell. Syst. Comput., 286, 255–264, 2014.
- [17] Kabir et al, *Fuzzy temporal fault tree analysis of dynamic systems*, International Journal of Approximate Reasoning, 77, 20-37, 2016.
- [18] Mohit Kumar, *A Novel Weakest tnorm based Fuzzy Fault Tree Analysis Through Qualitative Data Processing and Its Application in System Reliability Evaluation*. Journal of Intelligent Systems. 29, 977-993, 2020.



تحلیل قابلیت اطمینان چند مؤلفه‌ای در توزیع های کوماراسوامی بهبودیافته

پرفلک، آ ۱ و کهن سال، ۲

۱۰۲ گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)

چکیده

در این مقاله، برآورد پارامتر تنش-مقاومت در توزیع کوماراسوامی بهبودیافته تحت طرح سانسور فزاینده بررسی می‌شود. در حالتی که پارامترهای تنش و مقاومت یک بردار پارامتری غیر مشترک و یک پارامتر مشترک معلوم داشته باشند؛ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی و فواصل اطمینان مجانبی محاسبه شده و در نهایت با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو، نتایج به دست آمده شبیه‌سازی می‌شوند.

کلمات کلیدی: قابلیت اعتماد تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای، توزیع کوماراسوامی بهبودیافته، سانسور فزاینده، شبیه‌سازی مونت کارلو

۱ پیش‌گفتار

یکی از مسائل مهم و کاربردی در نظریه قابلیت اعتماد برای آماردان‌ها استنباط مدل تنش-مقاومت است. پارامتر تنش-مقاومت به صورت

$$R = P(Y < X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F_X(y)) dF_Y(y),$$

بیان می‌شود. تا زمانی که مقاومت اعمال شده از تنش آن بیشتر باشد سیستم در دسترس است. ایده‌ی این مدل اولین بار توسط [۱] معرفی شد.

^۱ aynaz.parfalak@gmail.com

^۲ kohansal@sci.ac.ir

سیستمی با بیش از یک مؤلفه را سیستم چندمؤلفه‌ای گویند. به تازگی این مدل توجه محققان زیادی را به خود جلب کرده است. در این نوع سیستم‌ها یک مؤلفه تنش مشترک و k مؤلفه مقاومت مستقل و هم توزیع وجود دارد و حداقل s مؤلفه از k مؤلفه مقاومت بیشتر از تنش باشد، سیستم در دسترس است. در مقاله [۲] اولین بار این مدل را به صورت

$$R_{s,k} = P((X_1, \dots, X_k) > Y) \\ = \sum_{p=s}^k \binom{k}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F_X(y))^p (F_X(y))^{k-p} dF_Y(y), \quad (1)$$

بسط دادند. حال یک سیستم با $k = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ مؤلفه مقاومت را در نظر می‌گیریم. در این شرایط تا زمانی که حداقل $s = (s_1, \dots, s_m)$ مؤلفه از k مؤلفه مقاومت بیشتر از تنش آن باشد سیستم در دسترس است. در مقاله [۴] رابطه‌ی (۱) را بهبود بخشیدند تا مدلی را به صورت

$$R_{s,k} = \sum_{p_1=s_1}^{k_1} \dots \sum_{p_m=s_m}^{k_m} \left(\prod_{l=1}^m \binom{k_l}{p_l} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{l=1}^m ((1 - F_l(y))^{p_l} (F_l(y))^{k_l-p_l}) dF_Y(y),$$

را به دست آوردند.

سانسور نوع اول و نوع دوم دو طرح سانسور اساسی هستند که از ترکیب آن‌ها سانسور پیوندی حاصل می‌شود. از آنجایی که امکان حذف واحدهای فعال در حین آزمایش در این طرح‌های سانسور وجود ندارد، لذا طرح سانسور فزاینده مطرح شده است. برای تشریح این طرح، وضعیتی را در نظر بگیرید که N واحد مستقل و یکسان با تابع توزیع تجمعی $F_X(x)$ و تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ ، تحت آزمایش طول عمر قرار گرفته‌اند. بلافاصله پس از اولین شکست، R_1 واحد تحت بررسی به طور تصادفی از آزمایش خارج می‌شوند، پس از دومین شکست، R_2 واحد تحت بررسی و به همین ترتیب تا این که در زمان شکست n ام تمامی $n = N - R_1 - \dots - R_{n-1} - n$ واحد تحت بررسی به طور تصادفی از آزمایش خارج می‌شوند. این طرح سانسور فزاینده نامیده می‌شود و مقادیر مرتب شده حاصل از این نوع سانسور با $X_{1:n:N}^{(R_1, \dots, R_n)}, \dots, X_{m:n:N}^{(R_1, \dots, R_m)}$ یا برای سهولت با X_1, \dots, X_n نمایش داده می‌شوند. در این طرح تعداد شکست‌های مشاهده شده n و طرح سانسور فزاینده (R_1, \dots, R_n) همگی از قبل به طور ثابت در نظر گرفته شده‌اند و از آنجایی که زمان‌های سانسور، تصادفی و تعداد ارقام حذفی همگی از قبل ثابت هستند، این طرح را طرح سانسور فزاینده نامیده‌اند.

لازم به ذکر است که اگر $R_1 = R_2 = \dots = R_{n-1} = 0$ و $n = N$ باشد هیچ سانسوری رخ نداده است و همه n آماره مرتب مشاهده شده‌اند. تابع درستی نامی نمونه‌های سانسور فزاینده به صورت

$$L(\theta) \propto \prod_{i=1}^n f_X(x_i) (1 - F_X(x_i))^{R_i},$$

است.

مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است: در بخش ۲ به معرفی توزیعی که به عنوان توزیع پایه مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم. در بخش ۳ به استنباط پارامتر تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای، تحت نمونه‌های سانسور فزاینده با فرض اینکه مدل دارای m متغیر مقاومت با توزیع کوماراسوامی بهبودیافته و یک متغیر تنش با توزیع گفته شده، به طوری که پارامتر مشترک α نامعلوم باشد را به دست آورده و برآورد ماکسیمم درستنمایی MLE و فواصل اطمینان مجانبی را محاسبه می‌کنیم و در بخش ۴ نیز مربوط به محاسبات شبیه‌سازی است.

۲ توزیع پایه

توزیع‌ای که به‌عنوان توزیع پایه در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد به‌صورت زیر است. کوماراسوامی یک متخصص آب شناس هندی بود و توزیع جدیدی که در فرایندهای حوزه‌ی آبی کاربرد دارد، معرفی کرد. سپس، کوماراسوامی تابع چگالی احتمال کلی‌تری را برای متغیرهای تصادفی از دو طرف محدودشده معرفی و با نام توزیع کوماراسوامی ارائه نمود. در ادامه به مطالعه این توزیع می‌پردازیم. اگر X دارای توزیع کوماراسوامی باشد تابع چگالی و تابع توزیع تجمعی آن به‌ترتیب به‌صورت

$$g_X(x) = \alpha\beta x^{\alpha-1}(1-x^\alpha)^{\beta-1}, \quad x \in (0, 1),$$

$$G_X(x) = 1 - (1-x^\alpha)^\beta, \quad x \in (0, 1),$$

بیان می‌شوند؛ به‌طوری که $\alpha, \beta > 0$ پارامترهای شکل هستند. توزیع کوماراسوامی دارای تابع نرخ شکست افزایشی می‌باشد بنابراین برای داده‌هایی با تابع نرخ خطر افزایشی مناسب می‌باشد.

۱.۲ توزیع کوماراسوامی بهبودیافته

توزیع کوماراسوامی بهبودیافته با تغییر متغیر $Y = (1 - \log(X))^{-1}$ در توزیع کوماراسوامی حاصل می‌شود و مدل‌های مناسبی برای متغیرهای تصادفی که بین دو کران متناهی هستند، می‌باشد. توزیع کوماراسوامی بهبودیافته دارای تابع نرخ خطری افزایشی، کاهشی و افزایشی می‌باشد بنابراین برای داده‌هایی با تابع توزیع تجربی به‌صورت گفته‌شده، مناسب می‌باشد. علاوه‌بر این، توزیع مناسبی برای پدیده‌های طبیعی با نتایجی شامل حدود بالا و پایین مانند قد افراد، نمرات امتحانی، درجه‌ی حرارت هوا و غیره می‌باشد. این توزیع، بسیار منعطف و کاربردی می‌باشد بنابراین برای تحلیل داده‌های مختلفی می‌توان از آن استفاده نمود. تابع چگالی و تابع توزیع تجمعی آن به‌ترتیب به‌صورت

$$f_Y(y) = \frac{\alpha\beta e^{\alpha-\frac{\alpha}{y}}(1-e^{\alpha-\frac{\alpha}{y}})^{\beta-1}}{y^2}, \quad 0 < y < 1, \quad (2)$$

$$F_Y(y) = 1 - (1 - e^{\alpha-\frac{\alpha}{y}})^\beta, \quad 0 < y < 1, \quad (3)$$

بیان می‌شوند که در آن $\alpha, \beta > 0$ پارامترهای شکل هستند.

۳ برآورد پارامتر $R_{s,k}$ با α مشترک و نامعلوم

۱.۳ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر $R_{s,k}$

۱.۱.۳ توزیع کوماراسوامی بهبودیافته

در این بخش برآورد ماکسیمم درست‌نمایی MLE پارامتر تنش-مقاومت برای توزیع کوماراسوامی بهبودیافته با فرض اینکه مدل دارای m متغیر مقاومت $X_1 \sim MK(\alpha, \beta_1), X_2 \sim MK(\alpha, \beta_2), \dots, X_m \sim MK(\alpha, \beta_m)$ و یک متغیر تنش $Y \sim MK(\alpha, \beta)$ به‌طوری که پارامتر مشترک α نامعلوم باشد، به‌دست می‌آوریم. در این شرایط پارامتر $R_{s,k}$

$$R_{s,k} = \sum_{p_1=s_1}^{k_1} \dots \sum_{p_m=s_m}^{k_m} \sum_{q_1=\dots}^{k_1-p_1} \dots \sum_{q_m=\dots}^{k_m-p_m} \left(\prod_{l=1}^m \binom{k_l}{p_l} \right) \times \left(\prod_{l=1}^m \binom{k_l-p_l}{q_l} \right) \\ \times (-1)^{\sum_{l=1}^m q_l} \frac{\beta}{\sum_{l=1}^m \beta_l(p_l + q_l) + \beta},$$

به دست می آید.

در ادامه برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر تنش-مقاومت چندمؤلفه ای را محاسبه می کنیم؛ برای محاسبه ی تابع درستنمایی، می توان n سیستم را روی آزمایش طول عمر در نظر گرفت. بنابراین نمونه ها را به صورت

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, X_l = \begin{bmatrix} X_{1l}^{(l)} & \dots & X_{k_l}^{(l)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{nl}^{(l)} & \dots & X_{n k_l}^{(l)} \end{bmatrix}, l = 1, \dots, m,$$

در نظر می گیریم. حال تابع درستنمایی را برای توزیع کوماراسوامی بهبودیافته می توان به صورت

$$L(\beta_1, \dots, \beta_m, \beta, \alpha) \propto \left(\prod_{l=1}^m \beta_l^{n k_l} \right) \alpha^{n(\sum_{l=1}^m k_l + 1)} \beta^n \times e^{-\left(\sum_{i=1}^n \beta_l V_l(\alpha) + \beta U(\alpha) \right)} \\ \times \frac{e^{\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^{k_l} \left(\alpha - \frac{\alpha}{x_{ijl}^{(l)}} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\alpha - \frac{\alpha}{y_i} \right)}}{\prod_{i=1}^n \prod_{l=1}^m \prod_{j=1}^{k_l} (x_{ijl}^{(l)})^2 \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{x_{ijl}^{(l)}}} \right) \times \prod_{i=1}^n y_i^2 \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{y_i}} \right)}, \quad (4)$$

نوشت، که در آن

$$V_l(\alpha) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_l} (1 + R_{ijl}^{(l)}) \log \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{x_{ijl}^{(l)}}} \right), \quad l = 1, \dots, m, \quad (5)$$

$$U(\alpha) = - \sum_{i=1}^n (1 + S_i) \log \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{y_i}} \right), \quad (6)$$

می باشد. حال از تابع لگاریتمی نسبت به $\alpha, \beta, \beta_l, l = 1, \dots, m$ مشتق می گیریم.

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta_l} = \frac{n k_l}{\beta_l} - V_l(\alpha), \quad l = 1, \dots, m, \quad \frac{\partial \ell}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - U(\alpha), \\ \frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} \left(\sum_{l=1}^m k_l + 1 \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^{k_l} \left(1 - \frac{1}{x_{ijl}^{(l)}} \right) + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{y_i} \right) \\ + e^\alpha \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^{k_l} \beta_l (1 + R_{ijl}^{(l)}) \left(\frac{x_{ijl}^{(l)} - 1}{x_{ijl}^{(l)} (e^\alpha - e^{-\frac{\alpha}{x_{ijl}^{(l)}}})} \right) \\ + \beta e^\alpha \sum_{i=1}^n (1 + S_i) \left(\frac{y_i - 1}{y_i (e^\alpha - e^{-\frac{\alpha}{y_i}})} \right) - e^\alpha \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^{k_l} \left(\frac{x_{ijl}^{(l)} - 1}{x_{ijl}^{(l)} (e^\alpha - e^{-\frac{\alpha}{x_{ijl}^{(l)}}})} \right) \\ - e^\alpha \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - 1}{y_i (e^\alpha - e^{-\frac{\alpha}{y_i}})} \right), \quad (7)$$

با برابر صفر قرار دادن مشتقات جزئی می‌توان برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها را به دست آورد، اما این برآوردها به سادگی قابل محاسبه نیستند؛ بنابراین از روش‌های عددی مانند نیوتن-رافسون برای حل دستگاه‌های غیرخطی استفاده می‌شود. با استفاده از خاصیت ناوردایی، برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر $R_{s,k}$ برای توزیع کوماراسوامی بهبودیافته به صورت

$$\hat{R}_{s,k}^{MLE} = \sum_{p_1=s_1}^{k_1} \cdots \sum_{p_m=s_m}^{k_m} \sum_{q_1=0}^{k_1-p_1} \cdots \sum_{q_m=0}^{k_m-p_m} \left(\prod_{l=1}^m \binom{k_l}{p_l} \right) \times \left(\prod_{l=1}^m \binom{k_l - p_l}{q_l} \right) \times (-1)^{\sum_{l=1}^m q_l} \frac{\hat{\beta}}{\sum_{l=1}^m \hat{\beta}_l (p_l + q_l) + \hat{\beta}}, \quad (8)$$

می‌باشد.

۲.۳ فواصل اطمینان مجانبی

در این بخش فواصل اطمینان مجانبی را برای $R_{s,k}$ بیان می‌کنیم، که در دو مرحله ابتدا با استفاده از قضیه حد مرکزی چندمتغیره، توزیع‌های مجانبی پارامترهای نامعلوم $\beta_1, \dots, \beta_m, \beta, \alpha$ را محاسبه می‌کنیم و سپس با استفاده از روش دلتا توزیع مجانبی پارامتر $R_{s,k}$ را به دست می‌آوریم. ماتریس اطلاع فیشر موردانتظار از رابطه $J(\theta) = E(I(\theta))$ به دست می‌آید که در آن $\theta = (\beta_1, \dots, \beta_m, \beta, \alpha)$ است. $I(\theta)$ ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده است که از رابطه $i, j = 1, \dots, m+2$ محاسبه می‌شود. $I(\theta) = [-\partial^2 \ell / (\partial \theta_i \partial \theta_j)]$ ، گاهی اوقات محاسبه ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده است که از رابطه $i, j = 1, \dots, m+2$ محاسبه می‌شود. گاهی اوقات محاسبه ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده است که از رابطه $i, j = 1, \dots, m+2$ محاسبه می‌شود. لذا از ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده استفاده می‌کنیم. در ادامه، ماتریس متقارن اطلاع فیشر مشاهده شده برای توزیع کوماراسوامی بهبودیافته را حساب می‌کنیم.

۱.۲.۳ توزیع کوماراسوامی بهبودیافته

در این حالت بردار پارامترهای توزیع کوماراسوامی بهبودیافته به صورت $\theta = (\beta_1, \dots, \beta_m, \beta, \alpha)$ است. درایه‌های ماتریس به صورت

$$I_{l,l} = \frac{nk_l}{\beta_l^2}, \quad I_{m+1,m+1} = \frac{n}{\beta^2}, \quad l = 1, \dots, m,$$

$$I_{l,m+1} = 0, \quad I_{l,k} = 0, \quad l, k = 1, \dots, m+1, l \neq k,$$

$$I_{l,m+2} = -e^\alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_l} (1 + R_{ij}^{(l)}) \left(\frac{x_{ij}^{(l)} - 1}{x_{ij}^{(l)} (e^\alpha - e^{\frac{\alpha}{x_{ij}^{(l)}}})} \right), \quad l = 1, \dots, m,$$

$$I_{m+1,m+2} = -e^\alpha \sum_{i=1}^n (1 + S_i) \left(\frac{y_i - 1}{y_i (e^\alpha - e^{\frac{\alpha}{y_i}})} \right),$$

$$\begin{aligned}
I_{m+\nu, m+\nu} &= \frac{n}{\alpha^\nu} \left(\sum_{l=1}^m k_l + 1 \right) + \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m \sum_{j_l=1}^{k_l} \left(\beta_l (1 + R_{ij_l}^{(l)}) - 1 \right) \\
&\times \left(\frac{(1 - \frac{1}{x_{ij_l}^{(l)}})^\nu}{\cosh(\alpha - \frac{\alpha}{x_{ij_l}^{(l)}}) - 1} \right) + \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n \left(\beta (1 + S_i) - 1 \right) \left(\frac{(1 - \frac{1}{y_i})^\nu}{\cosh(\alpha - \frac{\alpha}{y_i}) - 1} \right) \\
&+ e^\alpha \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m \sum_{j_l=1}^{k_l} \left(\beta_l (1 + R_{ij_l}^{(l)}) - 1 \right) \left(\frac{(x_{ij_l}^{(l)} - 1)^\nu}{(x_{ij_l}^{(l)})^\nu e^{\frac{\alpha}{x_{ij_l}^{(l)}}} (1 - e^{-\frac{\alpha}{x_{ij_l}^{(l)}}})^\nu} \right) \\
&+ e^\alpha \sum_{i=1}^n \left(\beta (1 + S_i) - 1 \right) \left(\frac{(y_i - 1)^\nu}{(y_i)^\nu e^{\frac{\alpha}{y_i}} (1 - e^{-\frac{\alpha}{y_i}})^\nu} \right),
\end{aligned}$$

به دست می آید. لذا، ماتریس متقارن اطلاع فیشر مشاهده شده به صورت

$$= \begin{bmatrix} I_{1,1} & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & I_{1,m+\nu} \\ & I_{2,2} & \dots & \cdot & \cdot & I_{2,m+\nu} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & I_{m,m} & \cdot & I_{m,m+\nu} \\ & & & & I_{m+1,m+1} & I_{m+1,m+\nu} \\ & & & & & I_{m+\nu,m+\nu} \end{bmatrix},$$

می باشد. در ادامه با استفاده از قضیه حد مرکزی چندمتغیره داریم:

$$(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_m, \hat{\beta}, \hat{\alpha}) \sim N_{m+\nu} \left((\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \beta, \alpha), I^{-1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \beta, \alpha) \right),$$

که بنابراین $I(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \beta, \alpha) = [I_{i,j}]$, $i, j = 1, \dots, m + \nu$ از معادلات فوق به دست می آید. بنابراین یک ماتریس متقارن است و به صورت

$$I^{-1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \beta, \alpha) = \frac{[b_{i,j}]}{|I(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \beta, \alpha)|}, \quad i, j = 1, \dots, m + \nu,$$

به دست می آید.

همچنین با استفاده از روش دلتا، $\hat{R}_{s,k}^{MLE} \sim N(R_{s,k}, B)$ که در آن $B = b^T I^{-1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \beta, \alpha) b$ می باشد. در این صورت

$$b = \left[\frac{\partial R_{s,k}}{\partial \beta_1} \quad \dots \quad \frac{\partial R_{s,k}}{\partial \beta_m} \quad \frac{\partial R_{s,k}}{\partial \beta} \quad \frac{\partial R_{s,k}}{\partial \alpha} \right]^T$$

در نتیجه؛ در توزیع کوماراسوامی بهبودیافته با استفاده از قضیه حد مرکزی چندمتغیره و روش دلتا به صورت

$$\begin{aligned}
B &= |I(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \beta, \alpha)|^{-1} \\
&\times \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial R_{s,k}}{\partial \beta_j} \frac{\partial R_{s,k}}{\partial \beta_i} b_{j,i} + \frac{\partial R_{s,k}}{\partial \beta} \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial R_{s,k}}{\partial \beta_i} b_{i,m+1} \right)^\nu + \left(\frac{\partial R_{s,k}}{\partial \beta} \right)^\nu b_{m+1,m+1} \right).
\end{aligned}$$

می باشد. بنابراین، یک بازه اطمینان مجانبی $(1 - \eta)\%$ برای $R_{s,k}$ به صورت

$$(\hat{R}_{s,k}^{MLE} - z_{1-\frac{\eta}{2}} \sqrt{B}, \hat{R}_{s,k}^{MLE} + z_{1-\frac{\eta}{2}} \sqrt{B}),$$

است.

۴ شبیه‌سازی

در این بخش، شبیه‌سازی مونت کارلو تحت سانسور فزاینده برای مقایسه کارایی برآوردگرها انجام شده است. کارایی برآوردگرهای مختلف نقطه‌ای با استفاده از میانگین توان‌های دوم خطا MLE و همچنین، برآوردگرهای فاصله‌ای با استفاده از طول فاصله اطمینان انجام شده است. در تمامی حالت‌ها نتایج با فرض $k_1 = 5$ و $k_2 = 5, n = 10$ محاسبه شده‌اند. برای یافتن نتایج شبیه‌سازی از طرح‌های سانسور مختلفی استفاده شده است که عبارتند از:

$$R_1 = [1, 1, 1, 1, 1], Q_1 = [1, 1, 1, 1, 1], S_1 = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],$$

$$R_2 = [5, 0, 0, 0, 0], Q_2 = [6, 0, 0, 0, 0], S_2 = [10, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],$$

$$R_3 = [0, 0, 0, 0, 5], Q_3 = [0, 0, 0, 0, 6], S_3 = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 10].$$

برای یافتن نتایج شبیه‌سازی، فرض می‌کنیم که مقادیر پارامترها به صورت $(\beta_1, \beta_2, \beta, \alpha) = (2, 2, 3, 2)$ می‌باشند. همچنین تمامی فواصل اطمینان در سطح معناداری $95\% = 100(1 - \eta)\%$ محاسبه شده‌اند. نتایج حاصل در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱. نتایج شبیه‌سازی در سانسور فزاینده با فرض اینکه پارامترهای مشترک نامعلوم هستند

طرح‌های سانسور	برآورد ماکسیمم درست‌نمایی	فواصل اطمینان مجانبی
(R_1, Q_1, S_1)	MSE	اریبی
(R_1, Q_1, S_1)	۰/۰۱۰۳	۰/۰۰۹۸
(R_2, Q_2, S_2)	۰/۰۱۱۷	۰/۰۱۳۲
(R_3, Q_3, S_3)	۰/۰۱۲۵	۰/۰۱۶۰
(R_1, Q_2, S_2)	۰/۰۱۰۴	۰/۰۱۱۹
(R_2, Q_3, S_1)	۰/۰۱۱۷	۰/۰۱۸۶

از جدول ۱ ملاحظه می‌شود که مقادیر برآورد و مقادیر MSE ها، تحت طرح‌های سانسور مختلف به هم نزدیک هستند. علاوه بر این مشاهده می‌شود که فواصل اطمینان مجانبی دارای طول کمی هستند.

مراجع

- [1] Birnbaum, Z.W., (1956), *On a use of the Mann-Whitney statistics*, Mathematical Statistics and Probability. 1, 13-17.
- [2] Bhattacharyya, G.K., Johnson, R.A., (1974), *Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model*, Journal of the American Statistical Association. 69, 966-970.
- [3] Kohansal, A., Shoaee, S., (2021), *Bayesian and classical estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model under adaptive hybrid progressive censored data*, Statistical Papers. 62, 309-359.

- [4] Rasethunsa, T.R., Nadar, M., (2018), *Stress-strength reliability of a non-identical-component strengths system based on upper record values from the family of Kumaraswamy generalized distributions*, *Statistics*. 52, 684-716.
- [5] Sagrillo, M., Guerra, R.R., Bayer, F.M., (2021), *Modified Kumaraswamy distributions for double bounded hydro-environmental data*, *Journal of Hydrology*. 603, 127021.



برآوردیابی برای توزیع وایبل بر اساس نمونه گیری مجموعه رتبه دار ماکسیمم با نمونه های نابرابر

تقوی دهقانی، ف ا ۱ و کامل میرمصطفائی، س م ت ۲

۱،۲ گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران

چکیده

در این مقاله، مسأله ی برآوردیابی کلاسیک و بیزی برای پارامترهای توزیع وایبل را بر اساس نمونه هایی که از طریق نمونه گیری مجموعه رتبه دار ماکسیمم با نمونه های نابرابر به دست می آیند، مطالعه می کنیم. یک مطالعه ی شبیه سازی برای ارزیابی عملکرد برآوردگرها و مقایسه ی عملکرد برآوردگرهای مبتنی بر طرح نمونه گیری مجموعه رتبه دار ماکسیمم با نمونه های نابرابر با برآوردگرهای مبتنی بر طرح نمونه گیری تصادفی ساده، انجام می دهیم.

کلمات کلیدی: الگوریتم متروپولیس هستینگز درون گیز، برآوردیابی بیزی، توزیع وایبل، نمونه گیری مجموعه رتبه دار ماکسیمم با نمونه های نابرابر

۱ پیش گفتار

توزیع وایبل یکی از متداول ترین الگوهای دوپارامتری است که در مطالعات قابلیت اعتماد، طول عمر و کنترل کیفیت و در شاخه های مختلف علوم از جمله پزشکی و مهندسی مورد استفاده قرار می گیرد. توزیع وایبل می تواند دارای تابع نرخ خطر صعودی، نزولی یا ثابت بسته به مقدار پارامتر شکل خود باشد که در نتیجه در الگوبندی برخی داده های طول عمر مفید است. در این مقاله، توزیع وایبل دوپارامتری را با نماد $W(\alpha, \beta)$ نمایش می دهیم که تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی آن به ترتیب به صورت زیر می باشند

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta}, \quad x \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0, \quad (1)$$

^۱ forouq.taqavi.1994@gmail.com

^۲ m.mirmostafaee@umz.ac.ir

$$F(x; \alpha, \beta) = 1 - e^{-\alpha x^\beta}, \quad x \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار به عنوان یک روش پیشنهادی نمونه‌گیری در راستای ارتقای روش نمونه‌گیری تصادفی ساده مورد توجه بسیاری از آماردانان قرار گرفته است و درشرایطی که اندازه‌گیری متغیر مورد نظر با دشواری همراه است (مستلزم صرف هزینه، وقت بوده یا مخرب باشد)، شاید مناسب‌تر باشد. گاهی می‌توان واحدهای نمونه‌گیری را به آسانی و با صرف هزینه‌ای کم رتبه‌بندی نمود. به عنوان مثال، گاهی در مسأله‌ی اندازه‌گیری میزان آلودگی خاک یک منطقه هزینه مرتبط با تجزیه و تحلیل و کارهای آزمایشگاهی بخش عظیمی از کل هزینه را تشکیل می‌دهد و این در حالی است که تشخیص قابلیت واحدهای نمونه کاری نسبتاً راحت می‌باشد. لذا می‌توان با اعمال روش‌های نمونه‌گیری خاص از ناهمگنی واحدها کاسته، مانع بروز نوسان‌های شدید گردید، برای جزئیات بیشتر به [۱] مراجعه نمایید. این رهیافت، یک روش نمونه‌گیری را تحت عنوان روش نمونه‌گیری رتبه‌دار مطرح می‌کند که نخستین بار توسط [۱۵] معرفی شد. ال-آدات و ال-صالح [۲] یک روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار بر اساس حجم نمونه‌های نابرابر را معرفی نمودند. اخیراً بیرادار و سانتوشا [۴] یک روش نمونه‌گیری رتبه‌دار با ایده‌ای بسیار نزدیک به مقاله‌ی [۲] را معرفی نمودند که در آن حجم نمونه‌ها در هر چرخه با یکدیگر برابر نیست و در هر نمونه ماکسیم مقدار مشاهدات را به عنوان نمونه‌ی اطلاع دهنده در نظر می‌گیرند و به اختصار آن را با MRSSU نشان می‌دهیم. این نوع نمونه‌گیری در مقایسه با نمونه‌گیری رتبه‌دار معمولی دارای این مزیت است که با اندازه‌گیری واحدهای کمتر در زمان و هزینه صرفه‌جویی می‌شود.

یک چرخه از روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار ماکسیم با نمونه‌های نابرابر به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{array}{l} 1 : X_{(1:1)1} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \rightarrow Z_1 = X_{(1:1)1}, \\ 2 : X_{(1:2)2} \quad X_{(2:2)2} \quad \dots \quad \dots \quad \rightarrow Z_2 = X_{(2:2)2}, \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ m : X_{(1:m)m} \quad X_{(2:m)m} \quad \dots \quad X_{(m:m)m} \quad \rightarrow Z_m = X_{(m:m)m}. \end{array}$$

در نتیجه نمونه‌ی $\{X_{(1:1)1}, X_{(2:2)2}, \dots, X_{(m:m)m}\}$ یک نمونه‌ی m تایی از یک چرخه‌ی MRSSU می‌باشد. می‌دانیم که $X_{(j:j)j}$ با j امین آماره‌ی ترتیبی از یک نمونه به حجم j هم‌توزیع است و تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر نوشته می‌شود

$$f_{(j)}(x) = j [F(x)]^{j-1} f(x),$$

که در آن $f(x)$ و $F(x)$ به ترتیب تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی جامعه اصلی می‌باشند. در نتیجه تابع چگالی احتمال توأم $X_{(1:1)1}, X_{(2:2)2}, \dots, X_{(m:m)m}$ به صورت زیر خواهد بود

$$f_{X_{(1:1)1}, X_{(2:2)2}, \dots, X_{(m:m)m}}(x_1, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^m i [F(x_i)]^{i-1} f(x_i). \quad (2)$$

در طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار ماکسیم با نمونه‌های نابرابر، ممکن است بیشتر از یک چرخه داشته باشیم که تعداد چرخه‌ها را می‌توان با n نشان داد. در نتیجه، یک نمونه‌ی mn تایی از روش نمونه‌گیری MRSSU به دست می‌آید. با این وجود در این مقاله، تعداد چرخه‌ها را یک در نظر می‌گیریم و همچنین برای سادگی، نمونه‌ی به دست آمده از MRSSU را با $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ نمایش می‌دهیم.

بیرادار و سانتوشا [۴] به منظور برآورد پارامتر توزیع نمایی از روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار ماکسیم با نمونه‌های نابرابر بهره بردند. بیرادار و شیوانا [۵] استنباط بیزی را برای توزیع وایبل زمانی که پارامتر شکل معلوم

باشد، بر اساس نمونه‌های MRSSU انجام دادند. طهماسبی و همکاران [۲۵] استنباط بیزی را برای توزیع رایلی با استفاده از نمونه‌های به دست آمده از MRSSU مورد پژوهش قرار دادند. اسکندرزاده و همکاران [۷] معیارهای اطلاع را برای روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار ماکسیم با نمونه‌های نابرابر مورد بررسی قرار دادند. از دیگر کارهای استنباطی بر اساس MRSSU می‌توان به عنوان مثال به جوکار و همکاران [۱۳]، بسی‌خسته و همکاران [۳] و جیانگ و گویی [۱۲] اشاره نمود. در این مقاله، مسأله‌ی برآوردیابی کلاسیک و بیزی برای توزیع وایبل را بر اساس نمونه‌های به دست آمده از MRSSU زمانی که هر دو پارامتر مجهول هستند، مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۲ برآوردیابی درستنمایی ماکسیم بر اساس نمونه‌های MRSSU

برآوردیابی درستنمایی ماکسیم یکی از متداول‌ترین روش‌های برآوردیابی کلاسیک است. فرض کنیم X_1, X_2, \dots, X_m یک نمونه‌ی به دست آمده از MRSSU از توزیع وایبل با تابع چگالی احتمال (۱) باشد و $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ بردار مشاهده شده‌ی $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ باشد. در این صورت با توجه به (۲) تابع درستنمایی برای پارامترهای α و β به شرط در اختیار داشتن \mathbf{x} به صورت زیر است

$$L(\alpha, \beta | \mathbf{x}) = \alpha^m \beta^m e^{-\alpha \sum_{i=1}^m x_i^\beta} \left(\prod_{i=1}^m x_i \right)^{\beta-1} \prod_{i=1}^m i \left(1 - e^{-\alpha x_i^\beta} \right)^{i-1}.$$

بنابراین لگاریتم تابع درستنمایی به صورت زیر است

$$\ell(\alpha, \beta | \mathbf{x}) = m \ln \alpha + m \ln \beta - \alpha \sum_{i=1}^m x_i^\beta + (\beta - 1) \sum_{i=1}^m \ln x_i + \sum_{i=1}^m \ln i + \sum_{i=1}^m (i - 1) \ln(1 - e^{-\alpha x_i^\beta}).$$

معادلات غیرخطی زیر می‌توانند در به دست آوردن برآوردهای درستنمایی ماکسیم به ما کمک کنند

$$\begin{aligned} \frac{\ell(\alpha, \beta | \mathbf{x})}{\partial \alpha} &= \frac{m}{\alpha} - \sum_{i=1}^m x_i^\beta + \sum_{i=1}^m \frac{(i-1) x_i^\beta e^{-\alpha x_i^\beta}}{1 - e^{-\alpha x_i^\beta}} = 0, \\ \frac{\ell(\alpha, \beta | \mathbf{x})}{\partial \beta} &= \frac{m}{\beta} + \sum_{i=1}^m \ln x_i - \alpha \sum_{i=1}^m x_i^\beta \ln x_i + \alpha \sum_{i=1}^m \frac{(i-1) x_i^\beta e^{-\alpha x_i^\beta} \ln x_i}{1 - e^{-\alpha x_i^\beta}} = 0. \end{aligned}$$

به نظر می‌رسد فرم‌های بسته‌ای برای جواب‌های معادلات فوق وجود ندارد، بنابراین از روش‌های عددی برای به دست آوردن ریشه‌های معادلات فوق استفاده می‌کنیم.

برآوردهای درستنمایی ماکسیم α و β را به ترتیب با $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ نشان می‌دهیم. تحت شرایط بیان شده در [۱۴]، $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ دارای توزیع مجانبی توأم نرمال دو متغیره با بردار میانگین $(\alpha, \beta)^T$ و واریانس مجانبی $J^{-1}(\alpha, \beta)$ خواهد بود که $J^{-1}(\alpha, \beta)$ معکوس ماتریس $J(\alpha, \beta)$ می‌باشد و عبارت است از

$$J(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} J_{\alpha\alpha} & J_{\alpha\beta} \\ J_{\beta\alpha} & J_{\beta\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E \left(\frac{\partial^2 \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})}{\partial \alpha^2} \right) & -E \left(\frac{\partial^2 \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \\ -E \left(\frac{\partial^2 \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})}{\partial \beta \partial \alpha} \right) & -E \left(\frac{\partial^2 \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})}{\partial \beta^2} \right) \end{bmatrix},$$

که $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ تابع چگالی احتمال توأم $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ است. ماتریس $J(\alpha, \beta)$ را ماتریس اطلاع فیشر حول بردار پارامتری $(\alpha, \beta)^T$ می‌نامند. بر اساس برآوردهای درستنمایی ماکسیم α و β می‌توان درایه‌های ماتریس $J(\alpha, \beta)$ را به صورت زیر برآورد نمود

$$\begin{aligned}\hat{J}_{\alpha\alpha} &= \frac{m}{\hat{\alpha}^2} + \sum_{i=1}^m \frac{(i-1) X_i^{\hat{\beta}} e^{-\hat{\alpha} X_i^{\hat{\beta}}}}{\left(1 - e^{-\hat{\alpha} X_i^{\hat{\beta}}}\right)^2}, \\ \hat{J}_{\beta\beta} &= \frac{m}{\hat{\beta}^2} + \hat{\alpha} \sum_{i=1}^m X_i^{\hat{\beta}} (\ln X_i)^2 + \hat{\alpha} \sum_{i=1}^m \frac{(i-1) X_i^{\hat{\beta}} e^{-\hat{\alpha} X_i^{\hat{\beta}}} (e^{-\hat{\alpha} X_i^{\hat{\beta}}} + \hat{\alpha} X_i^{\hat{\beta}} - 1) (\ln X_i)^2}{\left(1 - e^{-\hat{\alpha} X_i^{\hat{\beta}}}\right)^2}, \\ \hat{J}_{\alpha\beta} &= \hat{J}_{\beta\alpha} = \sum_{i=1}^m X_i^{\hat{\beta}} \ln X_i + \sum_{i=1}^m \frac{(i-1) X_i^{\hat{\beta}} e^{-\hat{\alpha} X_i^{\hat{\beta}}} (e^{-\hat{\alpha} X_i^{\hat{\beta}}} + \hat{\alpha} X_i^{\hat{\beta}} - 1) \ln X_i}{\left(1 - e^{-\hat{\alpha} X_i^{\hat{\beta}}}\right)^2}.\end{aligned}$$

بنابراین فاصله‌های اطمینان مجانبی برای پارامترهای α و β در سطح اطمینان $1 - \delta$ به ترتیب از چپ به راست عبارتند از

$$\hat{\alpha} \pm z_{\frac{\delta}{2}} \sqrt{B_{11}}, \quad \text{و} \quad \hat{\beta} \pm z_{\frac{\delta}{2}} \sqrt{B_{22}},$$

که z_{δ} چندک بالایی δ ام توزیع نرمال استاندارد می‌باشد و B_{11} و B_{22} درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $\hat{J}^{-1}(\alpha, \beta)$

$$\hat{J}^{-1}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \hat{J}_{\alpha\alpha} & \hat{J}_{\alpha\beta} \\ \hat{J}_{\beta\alpha} & \hat{J}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \text{ است و معکوس ماتریس } \hat{J}(\alpha, \beta) \text{ می‌باشد که}$$

۳ برآوردیابی بیزی بر اساس نمونه‌های MRSSU

در روش بیز، پارامترها خود به عنوان متغیرهای تصادفی در نظر گرفته می‌شوند و لذا دارای توزیع احتمال توأم می‌باشند که توزیع احتمال توأم پیشین نام دارد. در این مقاله، فرض می‌کنیم α و β مستقل بوده، هر کدام دارای توزیع پیشین گاما به ترتیب به صورت زیر هستند

$$\begin{aligned}\pi(\alpha) &= \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \alpha^{a_1-1} e^{-b_1 \alpha}, \quad \alpha > 0, \\ \pi(\beta) &= \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \beta^{a_2-1} e^{-b_2 \beta}, \quad \beta > 0,\end{aligned}$$

که ابر پارامترهای a_1, b_1, a_2, b_2 ثابت و مثبت هستند. با در نظر گرفتن چگالی‌های پیشین فوق، تابع چگالی احتمال پسین توأم پارامترها با اختیار داشتن x به صورت زیر می‌باشد

$$\pi(\alpha, \beta | \mathbf{x}) = \frac{1}{K} \alpha^{m+a_1-1} \beta^{m+a_2-1} e^{-\alpha(b_1 + \sum_{i=1}^m x_i^\beta) - b_2 \beta} \prod_{i=1}^m x_i^\beta (1 - e^{-\alpha x_i^\beta})^{i-1},$$

که

$$K = \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{m+a_1-1} \beta^{m+a_2-1} e^{-\alpha(b_1 + \sum_{i=1}^m x_i^\beta) - b_2 \beta} \prod_{i=1}^m x_i^\beta (1 - e^{-\alpha x_i^\beta})^{i-1} d\alpha d\beta.$$

چنانچه تابع زیان توان دوم خطا را در نظر بگیریم، برآورد بیز برای پارامتر مورد نظر برابر با امید ریاضی پسین

آن پارامتر می‌باشد، لذا برآوردهای بیز پارامترهای α و β به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= E(\alpha|\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{K} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{m+a_1} \beta^{m+a_2-1} e^{-\alpha(b_1+\sum_{i=1}^m x_i^\beta)-b_2\beta} \prod_{i=1}^m x_i^\beta (1 - e^{-\alpha x_i^\beta})^{i-1} d\alpha d\beta, \\ \tilde{\beta} &= E(\beta|\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{K} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{m+a_1-1} \beta^{m+a_2} e^{-\alpha(b_1+\sum_{i=1}^m x_i^\beta)-b_2\beta} \prod_{i=1}^m x_i^\beta (1 - e^{-\alpha x_i^\beta})^{i-1} d\alpha d\beta.\end{aligned}$$

به نظر می‌رسد که فرم‌های بسته‌ای برای انتگرال‌های فوق وجود ندارند، از این رو در صدد برمی‌آییم تا به کمک الگوریتم متروپولیس هستینگز درون گیبز، نمونه‌ی بزرگی از تابع چگالی احتمال پسین توأم پارامترها تولید کنیم و با استفاده از این نمونه، مقدارهای تقریبی برآوردهای بیز پارامترها را محاسبه نماییم. توزیع پیشنهادی به کار رفته در الگوریتم به کار گرفته شده در این مقاله توزیع نرمال بریده شده‌ی مثبت نام دارد. گوییم متغیر تصادفی Y دارای توزیع نرمال بریده شده‌ی مثبت با پارامتر مکان μ و پارامتر مقیاس σ است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد

$$f_{TN}(y|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \Phi(\frac{\mu}{\sigma}) \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad y > 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0,$$

که $\Phi(\cdot)$ تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال استاندارد است. اگر Y دارای توزیع نرمال بریده شده‌ی مثبت با پارامتر مکان μ و پارامتر مقیاس σ باشد، می‌نویسیم $Y \sim TN(\mu, \sigma)$.

تابع چگالی شرطی پسین پارامتر α به شرط در اختیار داشتن x و β عبارت است از

$$\pi_1(\alpha|\beta, \mathbf{x}) \propto \alpha^{m+a_1-1} e^{-\alpha(b_1+\sum_{i=1}^m x_i^\beta)} \prod_{i=1}^m (1 - e^{-\alpha x_i^\beta})^{i-1}.$$

همچنین، تابع چگالی شرطی پسین پارامتر β به فرض در اختیار داشتن x و α عبارت است از

$$\pi_2(\beta|\alpha, \mathbf{x}) \propto \beta^{m+a_2-1} e^{-\alpha \sum_{i=1}^m x_i^\beta - b_2\beta} \prod_{i=1}^m x_i^\beta (1 - e^{-\alpha x_i^\beta})^{i-1}.$$

الگوریتم متروپولیس هستینگز درون گیبز به کار گرفته شده در این مقاله به شرح زیر است.

الگوریتم متروپولیس هستینگز درون گیبز

۱. مقادیر اولیه پارامترهای α و β را به صورت $(\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}) = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ قرار می‌دهیم و همچنین قرار می‌دهیم $t = 1$.

۲. به ازای مقادیر $(\alpha^{(t-1)}, \beta^{(t-1)})$ مقدار α^* را از توزیع نرمال بریده شده‌ی مثبت $TN(\alpha^{(t-1)}, \sigma_\alpha)$ تولید می‌کنیم. آن‌گاه با احتمال

$$P = \min \left\{ \frac{\pi_1(\alpha^*|\beta^{(t-1)}, \mathbf{x}) f_{TN}(\alpha^{(t-1)}|\alpha^*, \sigma_\alpha)}{\pi_1(\alpha^{(t-1)}|\beta^{(t-1)}, \mathbf{x}) f_{TN}(\alpha^*|\alpha^{(t-1)}, \sigma_\alpha)}, 1 \right\}$$

قرار می‌دهیم $\alpha^{(t)} = \alpha^*$ و در غیر این صورت قرار می‌دهیم $\alpha^{(t)} = \alpha^{(t-1)}$.

۳. به ازای مقادیر $(\alpha^{(t)}, \beta^{(t-1)})$ مقدار β^* را از توزیع نرمال بریده شده‌ی مثبت $TN(\beta^{(t-1)}, \sigma_\beta)$ تولید می‌کنیم. آن‌گاه با احتمال

$$P = \min \left\{ \frac{\pi_{\nu}(\beta^* | \alpha^{(t)}, \mathbf{x}) f_{TN}(\beta^{(t-1)} | \beta^*, \sigma_\beta)}{\pi_{\nu}(\beta^{(t-1)} | \alpha^{(t)}, \mathbf{x}) f_{TN}(\beta^* | \beta^{(t-1)}, \sigma_\beta)}, 1 \right\}$$

قرار می‌دهیم $\beta^{(t)} = \beta^*$ و در غیر این صورت قرار می‌دهیم $\beta^{(t)} = \beta^{(t-1)}$.

۴. $t = t + 1$ قرار می‌دهیم.

۵. گام‌های ۲ تا ۴ را N بار تکرار می‌کنیم که که N یک عدد بزرگ می‌باشد.

بنابراین نمونه‌ی تولید شده توسط الگوریتم متروپولیس هستینگز درون گیبز برای (α, β) به صورت

$$\{(\alpha^{(M+1)}, \beta^{(M+1)}), (\alpha^{(M+2)}, \beta^{(M+2)}), \dots, (\alpha^{(N)}, \beta^{(N)})\}$$

به دست می‌آید که در آن M نقطه برش در الگوریتم می‌باشد.

بنابراین با استفاده از نمونه‌ی تولید شده توسط الگوریتم متروپولیس هستینگز درون گیبز، برآوردهای بیز تقریبی برای پارامترهای α و β تحت تابع زیان درجه دوم خطا به ترتیب از چپ به راست به صورت زیر می‌باشند

$$\tilde{\alpha}^* = \frac{1}{N-M} \sum_{t=M+1}^N \alpha^{(t)}, \quad \text{و} \quad \tilde{\beta}^* = \frac{1}{N-M} \sum_{t=M+1}^N \beta^{(t)}.$$

باتوجه به نمونه‌ی $\{(\alpha^{(q)}, \beta^{(q)}); q = M+1, \dots, N\}$ که توسط الگوریتم متروپولیس هستینگز درون گیبز به دست آمده است، می‌توانیم کوتاه‌ترین فاصله‌های باورپذیری را به روش چن و شائو [۶] برای α و β به دست آوریم. فرض کنید $\alpha_{(1)} \leq \alpha_{(2)} \leq \dots \leq \alpha_{(N-M)}$ نمونه‌ی مرتب‌شده‌ی $\{\alpha^{(q)}; q = M+1, \dots, N\}$ باشد، آن‌گاه کوتاه‌ترین فاصله‌ی باورپذیری $\% (1-\gamma) 100$ به روش چن و شائو برای α به صورت

$$(\alpha_{(j)}, \alpha_{(j+[(N-M)(1-\gamma)])})$$

می‌باشد که در آن پهنای فاصله‌ی z ام به صورت زیر انتخاب می‌شود

$$\alpha_{(j+[(N-M)(1-\gamma)])} - \alpha_{(j)} = \min\{\alpha_{(i+[(N-M)(1-\gamma)])} - \alpha_{(i)}\}, \quad 1 \leq i \leq K^*,$$

که $K^* = N - M - [(N - M)(1 - \gamma)]$ می‌باشد.

به طور مشابه می‌توان کوتاه‌ترین فاصله‌ی باورپذیری به روش چن و شائو را برای پارامتر β نیز به دست آورد.

۴ مطالعه‌ی شبیه‌سازی

در این بخش در راستای ارزیابی عملکرد برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای مطرح شده در این مقاله و همچنین مقایسه‌ی برآوردهای مبتنی بر MRSSU با برآوردهای متناظر مبتنی بر نمونه‌گیری تصادفی ساده، یک مطالعه شبیه‌سازی مونت کارلو انجام می‌پذیرد. تعداد تکرارهای شبیه‌سازی را $N^* = 1000$ در نظر می‌گیریم. همچنین مقادیر پارامترها را دو ترکیب پارامتری $(\alpha, \beta) = (3, 2)$ و $(4, 5)$ اختیار نمودیم. حجم نمونه‌ها را $m = 15, 25$ در

نظر گرفتیم. همچنین در برآوردیابی بیزی، مقادیر ابرپارامترها را $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0.1$ و مقادیر پارامترهای مقیاس توزیع‌های پیشنهادی را $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 1$ انتخاب نمودیم. برای بررسی همگرایی زنجیره‌های مارکوف مونت کارلوی تولید شده توسط الگوریتم متروپولیس هستینگز درون گیز از سه معیار الف) آزمون گوک [۸] ب) معیار تشخیص رافتری و لويس [۲۰] و [۲۱] ج) معیار تشخیص همگرایی هیدلبرگر و ولچ [۱۱] بهره برده‌ایم. لازم به ذکر است که هیدلبرگر و ولچ [۱۱] از نتایج تحقیقات [۹]، [۱۰]، [۲۳]، [۲۲] و [۲۴] کمک گرفته‌اند یا به این تحقیقات اشاره داشته‌اند.

در شبیه‌سازی مربوط به طرح نمونه‌گیری تصادفی ساده، برای آن‌که زنجیره‌های مارکوف مونت کارلوی تولید شده توسط سه معیار مذکور مورد پذیرش واقع گردند، در برخی تکرارها از ترفند تنک‌سازی استفاده نمودیم. طرح نمونه‌گیری تصادفی ساده به اختصار با SRS نمایش می‌دهیم. همچنین در تعدادی از تکرارهای شبیه‌سازی کران‌های پایین فاصله‌های اطمینان بر اساس SRS منفی شده‌اند که در این صورت آن‌ها را با مقدار صفر جایگزین کرده‌ایم. فرض کنید $\hat{\alpha}(i)$ برآورد به دست آمده برای α در i امین تکرار از شبیه‌سازی باشد. آنگاه میانگین توان دوم خطای برآوردشده برای برآوردگر α که آن را با $\hat{\alpha}$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$EMSE(\hat{\alpha}) = \frac{1}{N^*} \sum_{i=1}^{N^*} (\hat{\alpha}(i) - \alpha)^2.$$

به همین صورت می‌توان میانگین توان دوم خطای برآوردشده را برای برآوردگرهای β نیز به دست آورد. میانگین توان دوم خطاها را برای برآوردگرهای نقطه‌ای کلاسیک و بیز به دست آورده، نتایج در جدول ۴ خلاصه‌بندی شده‌اند. برای برآوردگرهای فاصله‌ای نیز احتمال پوشش و متوسط طول فاصله‌ها را محاسبه نمودیم و نتایج در جدول ۴ گزارش شده‌اند.

با توجه به جدول‌های ۱ و ۲ نتایج زیر را می‌توان بیان نمود.

- از جدول ۱ مشاهده می‌شود که برآوردگرهای نقطه‌ای مبتنی بر MRSSU با توجه به معیار میانگین توان دوم خطای برآوردشده به وضوح بهتر از برآوردگرهای نقطه‌ای متناظر مبتنی بر SRS عمل کرده‌اند. همچنین از جدول ۲ می‌بینیم که برآوردگرهای فاصله‌ای ۹۵ درصد مبتنی بر MRSSU با توجه به متوسط طول عملکرد بهتری در مقایسه با برآوردگرهای فاصله‌ای ۹۵ درصد متناظر مبتنی بر SRS دارند.
- با افزایش حجم نمونه شاهد عملکرد بهتری در برآوردگرهای نقطه‌ای با توجه به معیار میانگین توان دوم خطای برآوردشده و در برآوردگرهای فاصله‌ای با توجه به معیار متوسط طول می‌باشیم.
- از جدول ۱ مشاهده می‌کنیم که برآوردگرهای نقطه‌ای بیز عملکرد بهتری با توجه به معیار میانگین توان دوم خطای برآوردشده در مقایسه با برآوردگرهای درستمایی ماکسیمم متناظر دارا می‌باشند. از جدول ۲ نیز ملاحظه می‌کنیم که بازه‌های باورپذیری ۹۵ درصد دارای متوسط طول کمتری در مقایسه با فاصله‌های اطمینان مجانبی ۹۵ درصد متناظر می‌باشند.
- از جدول ۲ ملاحظه می‌شود که احتمال‌های پوشش همگی به مقدار اسمی ۰/۹۵ نزدیک می‌باشند.

جدول ۱. مقادیر میانگین توان دوم خطا برای برآوردگرهای نقطه‌ای کلاسیک و بیز مبتنی بر نمونه‌های MRSSU و SRS.

(α, β)	m		درست‌نمایی		بیز	
			EMSE($\hat{\alpha}$)	EMSE($\hat{\beta}$)	EMSE($\tilde{\alpha}$)	EMSE($\tilde{\beta}$)
(۳, ۲)	۱۵	MRSSU	۰/۲۱۷۴	۰/۲۶۳۲	۰/۲۰۶۲	۰/۲۳۵۵
		SRS	۴/۰۹۸۳	۰/۳۱۰۷	۲/۴۵۹۳	۰/۲۴۹۱
	۲۵	MRSSU	۰/۰۶۴۲	۰/۰۹۴۳	۰/۰۶۲۸	۰/۰۸۸۳
		SRS	۰/۸۵۷۲	۰/۱۲۸۱	۰/۷۴۸۴	۰/۱۱۵۸
(۴, ۵)	۱۵	MRSSU	۰/۵۲۰۳	۱/۲۹۵۴	۰/۴۴۳۵	۱/۰۳۶۱
		SRS	۸/۳۱۳۴	۱/۷۹۷۰	۳/۷۲۵۸	۱/۱۷۲۱
	۲۵	MRSSU	۰/۱۴۹۸	۰/۶۲۵۴	۰/۱۴۱۶	۰/۵۵۹۴
		SRS	۲/۷۱۴۱	۰/۹۱۰۳	۱/۹۲۹۹	۰/۷۳۳۸

جدول ۲. مقادیر متوسط طول و احتمال پوشش برای فاصله‌های اطمینان مجانبی و بازه‌های باورپذیری ۹۵ درصد مبتنی بر نمونه‌های MRSSU و SRS.

نتایج برای برآوردگرهای فاصله‌ای برای پارامتر α

(α, β)	m		مجانبی		باورپذیری	
			متوسط طول	احتمال پوشش	متوسط طول	احتمال پوشش
(۳, ۲)	۱۵	MRSSU	۱/۵۰۵۴	۰/۹۳۴	۱/۴۷۶۲	۰/۹۳۰
		SRS	۴/۸۸۴۸	۰/۹۶۶	۴/۲۶۵۷	۰/۹۴۹
	۲۵	MRSSU	۰/۹۴۰۸	۰/۹۵۱	۰/۹۲۸۰	۰/۹۵۱
		SRS	۳/۰۹۰۱	۰/۹۷۶	۲/۹۲۳۹	۰/۹۶۶
(۴, ۵)	۱۵	MRSSU	۲/۴۲۷۵	۰/۹۵۷	۲/۳۲۳۲	۰/۹۴۸
		SRS	۷/۵۵۰۶	۰/۹۷۹	۶/۰۸۸۲	۰/۹۶۳
	۲۵	MRSSU	۱/۴۳۴۴	۰/۹۵۷	۱/۴۰۲۹	۰/۹۶۰
		SRS	۴/۹۹۲۰	۰/۹۷۵	۴/۵۱۵۲	۰/۹۵۹

نتایج برای برآوردگرهای فاصله‌ای برای پارامتر β

(α, β)	m		مجانبی		باورپذیری	
			متوسط طول	احتمال پوشش	متوسط طول	احتمال پوشش
(۳, ۲)	۱۵	MRSSU	۱/۵۷۴۶	۰/۹۳۹	۱/۵۳۷۳	۰/۹۴۱
		SRS	۱/۷۷۷۱	۰/۹۴۶	۱/۷۰۲۳	۰/۹۴۹
	۲۵	MRSSU	۱/۱۳۹۳	۰/۹۵۳	۱/۱۱۹۵	۰/۹۴۶
		SRS	۱/۲۹۱۹	۰/۹۵۶	۱/۲۵۸۱	۰/۹۵۶
(۴, ۵)	۱۵	MRSSU	۳/۸۹۳۰	۰/۹۶۱	۳/۷۵۲۴	۰/۹۶۵
		SRS	۴/۴۳۳۵	۰/۹۵۲	۴/۱۲۱۶	۰/۹۶۱
	۲۵	MRSSU	۲/۸۴۲۱	۰/۹۵۱	۲/۷۷۹۷	۰/۹۵۵
		SRS	۳/۲۹۰۷	۰/۹۵۱	۳/۱۶۱۸	۰/۹۵۰

در پایان متذکر می‌شویم که محاسبات مربوط به شبیه‌سازی در این مقاله به کمک نرم افزار آماری R [۱۹] و بسته‌های نرم‌افزاری coda [۱۷] و truncnorm [۱۶] انجام شده‌اند.

مراجع

- [۱] ا. رحیمی ده‌چراغی، کاربردهای نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار در قابلیت اعتماد، پایان نامه کارشناسی ارشد، ۱۳۹۵.
- [2] Al-Odat, M.T. and Al-Saleh, M.F. (2001), *A variation of ranked set sampling*, J. Appl. Statist. Sci. 10, 137–146.
- [3] Basikhasteh, M., Lak, F. and Afshari, M. (2020), *Bayesian estimation of stress–strength reliability for two-parameter bathtub-shaped lifetime distribution based on maximum ranked set sampling with unequal samples*, J. Stat. Comput. Simul. 90, 2975–2990.
- [4] Biradar, B.S. and Santosha, C.D. (2014), *Estimation of the mean of the exponential distribution using maximum ranked set sampling with unequal samples*, Open J. Stat. 4, 641–649.
- [5] Biradar, B.S. and Shivanna, B.K. (2016), *Weibull-Bayesian estimation based on maximum ranked set sampling with unequal samples*, Open J. Stat. 6, 1028–1036.
- [6] Chen, M.H. and Shao, Q.M. (1999), *Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals*, J. Comput. Graph. Statist. 8, 69–92.
- [7] Eskandarzadeh, M., Di Crescenzo, A. and Tahmasebi, S. (2018), *Measures of information for maximum ranked set sampling with unequal samples*, Comm. Statist. Theory Methods 47, 4692–4709.
- [8] Geweke, J. (1992), *Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments*, In *Bayesian statistics 4*, Eds. J.M. Bernardo, J.O. Berger, A.P. Dawid and A.F.M. Smith, Clarendon Press, Oxford, pp. 169–193.
- [9] Heidelberger, P. and Welch, P.D. (1981), *A Spectral method for confidence interval generation and run length control in simulations*, Commun. ACM 24, 233–245.
- [10] Heidelberger, P. and Welch, P.D. (1981), *Adaptive spectral methods for simulation output analysis*, IBM J. Res. Dev. 25, 860–876.
- [11] Heidelberger, P. and Welch, P.D. (1983), *Simulation run length control in the presence of an initial transient*, Oper. Res. 31, 1109–1144.
- [12] Jiang, H. and Gui, W. (2021), *Bayesian inference for the parameters of Kumaraswamy distribution via ranked set sampling*, Symmetry 13, 1170.

- [13] Joukar, A., Ramezani, M. and MirMostafaei, S.M.T.K. (2021), *Parameter estimation for the exponential-Poisson distribution based on ranked set samples*, *Comm. Statist. Theory Methods* 50, 560–581.
- [14] Lehmann, E.L. and Casella, G. (1998), *Theory of point estimation*, 2nd Edition, Springer-Verlag, New York.
- [15] McIntyre, G.A. (1952), *A method for unbiased selective sampling, using ranked sets*, *Aust. J. Agric. Res.* 3, 385–390.
- [16] Mersmann, O., Trautmann, H., Steuer, D. and Bornkamp, B. (2018), *truncnorm: Truncated normal distribution*, R package version 1.0-8, "<https://CRAN.R-project.org/package=truncnorm>".
- [17] Plummer, M. Best, N., Cowles, K. and Vines, K. (2006), *CODA: Convergence diagnosis and output analysis for MCMC*, *R News* 6, 7–11.
- [18] Plummer, M. Best, N., Cowles, K., Vines, K., Sarkar, D., Bates, D., Almond, R. and Magnusson, A. (2020), *coda: Output analysis and diagnostics for MCMC*, R package version 0.19-4, "<https://CRAN.R-project.org/package=coda>".
- [19] R Core Team (2021), *R: A language and environment for statistical computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- [20] Raftery, A.E. and Lewis, S.M. (1992), *Comment: One long run with diagnostics: Implementation strategies for Markov chain Monte Carlo*, *Statist. Sci.* 7, 493–497.
- [21] Raftery, A.E. and Lewis, S.M. (1996), *Implementing MCMC*, In *Markov chain Monte Carlo in practice*, Eds. W.R. Gilks, S. Richardson, D.J. Spiegelhalter, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, pp. 115–130.
- [22] Schruben, L.W. (1982), *Detecting initialization bias in simulation output*, *Oper. Res.* 30, 569–590.
- [23] Schruben, L., Singh, H. and Tierney, L. (1980), *A test of initialization bias hypotheses in simulation output*, Technical Report 471, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, Ithaca, New York 14853.
- [24] Schruben, L., Singh, H. and Tierney, L. (1983), *Optimal tests for initialization bias in simulation output*, *Oper. Res.* 31, 1167–1178.
- [25] Tahmasebi, S., Haji Hosseini, E. and Jafari, A.A. (2017), *Bayesian estimation for Rayleigh distribution based on ranked set sampling*, *New Trend Math. Sci.* 5, 97–106.



استنباط آماری روی توزیع لوماکس تحت طرح سانسور توام پیشرونده نوع دوم متعادل شده

رسولی، ع ۱ و بهمنی، م ۲

۱،۲ گروه آمار، دانشکده علوم، دانشگاه زنجان

چکیده

در این مقاله استنباط آماری روی پارامترهای توزیع لوماکس به عنوان یک توزیع طول عمر که کاربردهای متنوعی در زمینه‌های فیزیک، پزشکی و بیولوژی دارد، تحت طرح جدید سانسور پیشرونده نوع دوم متعادل شده و بر اساس نمونه توام آمیخته از دو جامعه انجام شده است. همچنین برآوردگرها بر اساس الگوریتم EM ارائه گردیده و در نهایت تحت شبیه‌سازی کارایی نتایج به دست آمده، سنجیده شده است.

کلمات کلیدی: توزیع لوماکس، استنباط درست‌نمایی، سانسور پیشرونده توام نوع دوم متعادل شده، الگوریتم EM

۱ پیش‌گفتار

در مطالعات قابلیت اطمینان و آزمایشات طول عمر، معمولاً داده‌های زمان شکست مولفه‌های تحت آزمایش به طور کامل در اختیار نیستند و به همین دلیل طرح‌های نمونه برداری روی داده‌های سانسور شده توسط محقق متعددی مطرح گردیده است. از جمله این طرح‌ها می‌توان به [۴] و [۳] اشاره کرد. اخیراً حالتی که دو نمونه از دو جامعه به طور آمیخته در آزمایش طول عمر شرکت داده می‌شوند مورد توجه محققین قرار گرفته است (برای مطالعه بیشتر به [۵] مراجعه کنید). در این راستا و به جهت دستیابی به نتایج بهتر و زمان آزمایش سریعتر، [۲] طرح سانسور پیشرونده نوع دوم متعادل شده را معرفی کرده‌اند. با توجه به انعطاف‌پذیری و سادگی محاسبات در این طرح نسبت به

^۱ rasouli@znu.ac.ir

^۲ bahmanimo74@znu.ac.ir

سایر طرح‌های نمونه برداری سانسور پیشرونده، می‌توان آن را جانشین طرح‌های قبلی نمود. ما در این مقاله این طرح را برای دو خانواده از توزیع‌های لوماکس تعمیم داده‌ایم. فرض کنید محصولات در یک آزمایش طول عمر از دو خط تولید مستقل تحت شرایط یکسان به دست آمده‌اند. فرض کنید حجم نمونه‌های تحت آزمایش برای جامعه اول m و برای جامعه دوم n باشد. هر نمونه مربوط به خانواده‌ای از محصولات با طول عمر تصادفی از توزیع لوماکس با پارامتر شکل α و پارامتر مقیاس β می‌باشد. توزیع لوماکس توسط لوماکس در سال ۱۹۵۴ معرفی گردید، و بر اساس ویژگی‌های آن به عنوان یک توزیع طول عمر به ویژه در فیزیک، ستاره شناسی، پزشکی و علوم بیولوژی کاربرد دارد. فرض می‌کنیم این نمونه‌ها همزمان در آزمایش طول عمر وارد شده و طول عمر به صورت متغیرهای تصادفی $X_{11}, \dots, X_{1m}, Y_{11}, \dots, Y_{1n}$ باشند. برای هر توزیع لوماکس تابع چگالی و تابع توزیع به ترتیب به صورت

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha\beta(1 + \beta x)^{-\alpha-1}, \quad x > 0,$$

$$F(x; \alpha, \beta) = 1 - (1 + \beta x)^{-\alpha}, \quad x > 0,$$

مفروض می‌شود. فرض کنید تعداد شکست‌های مشاهده شده برابر k باشد و $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_k$ نشان دهنده‌ی متغیر تصادفی طول عمر ثبت شده در آزمایش طول عمر باشد. در طرح سانسور پیشرونده توام متعادل شده نوع دوم فرض کنید با توجه به دو نمونه تحت آزمایش، اگر مشاهده شکست اول از خانواده اول باشد در این حالت، R_1 واحد تحت آزمایش را از این نمونه و $R_1 + 1$ واحد تحت آزمایش را از نمونه دیگر تحت آزمایش طول عمر خارج می‌کنیم. آزمایش طول عمر ادامه یافته تا شکست دوم مشاهده گردد، فرض کنید این نمونه از خانواده دوم باشد. در این حالت R_2 واحد تحت آزمایش را از این خانواده و $R_2 + 1$ واحد را از خانواده‌ی دیگر به تصادف انتخاب و خارج می‌کنیم و این کار را ادامه می‌دهیم تا k امین شکست رخ دهد. پس از دیدن شکست k ام که مهم نیست از کدام خانواده باشد تمام نمونه‌های باقی مانده از این دو خانواده را از آزمایش طول عمر خارج کرده و آزمایش خاتمه می‌یابد. متغیرهای تصادفی z_i به صورت $z_i = 1$ یعنی مشاهده i ام از خانواده اول باشد و $z_i = 0$ در غیر این صورت تعریف می‌گردند.

۲ برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی

بر اساس طرح سانسور پیشرونده نوع دوم متعادل شده با n, m و R_1, \dots, R_{k-1} بر مبنای مشاهدات $W = (w_1, w_2, \dots, w_k)$ و $Z = (z_1, z_2, \dots, z_k)$ وقتی دو خانواده از توزیع لوماکس باشد، آنگاه تابع درستنمایی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد،

$$L(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, w, z) =$$

$$C \prod_{i=1}^{k-1} \left\{ f(w_i) \bar{F}(w_i)^{R_i} \bar{G}(w_i)^{R_i+1} \right\}^{z_i} \left\{ g(w_i) \bar{G}(w_i)^{R_i} \bar{F}(w_i)^{R_i+1} \right\}^{1-z_i}$$

$$\times \left\{ f(w_k) \bar{F}(w_k)^{m^*-1} \bar{G}(w_k)^{n^*} \right\}^{z_k} \left\{ g(w_k) \bar{G}(w_k)^{n^*-1} \bar{F}(w_k)^{m^*} \right\}^{1-z_k} \quad (1)$$

$$C = \prod_{i=1}^k \left[\left(m - \sum_{j=1}^{i-1} (R_j + 1) \right) z_i + \left(n - \sum_{j=1}^{i-1} (R_j + 1) \right) (1 - z_i) \right],$$

$$\bar{F} = 1 - F, \quad \bar{G} = 1 - G, \quad m^* = m - \sum_{j=1}^{k-1} (R_j + 1), \quad n^* = n - \sum_{j=1}^{k-1} (R_j + 1),$$

است. با جایگذاری تابع چگالی و تابع توزیع، توزیع لوماکس در رابطه (۱) تابع درستنمایی به صورت زیر به دست می آید،

$$L(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \mathbf{w}, \mathbf{z}) =$$

$$\times C(\alpha_1, \beta_1)^{m_k} (\alpha_2, \beta_2)^{n_k} \prod_{i=1}^{k-1} (1 + \beta_1 w_i)^{-(\alpha_1(R_i+1)+z_i)} (1 + \beta_2 w_i)^{-(\alpha_2(R_i+1)+1-z_i)}$$

$$\times (1 + \beta_1 w_k)^{-(\alpha_1 m^* + z_k)} (1 + \beta_2 w_k)^{-(\alpha_2 n^* + 1 - z_k)}, \quad (2)$$

در نتیجه لگاریتم تابع درستنمایی را می توان به صورت زیر نوشت،

$$l = \ln L(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \mathbf{w}, \mathbf{z}) =$$

$$\ln C + m_k [\ln \alpha_1 + \ln \beta_1] + n_k [\ln \alpha_2 + \ln \beta_2]$$

$$- \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_1 (R_i + 1) + z_i) \ln (1 + \beta_1 w_i) - \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_2 (R_i + 1) + 1 - z_i) \ln (1 + \beta_2 w_i)$$

$$- (\alpha_1 m^* + z_k) \ln (1 + \beta_1 w_k) - (\alpha_2 n^* + 1 - z_k) \ln (1 + \beta_2 w_k) \quad (3)$$

که در آن $n_k = \sum_{i=1}^k (1 - z_i)$ و $m_k = \sum_{i=1}^k z_i$ است. اگر از رابطه (۳) نسبت به $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ مشتق جزئی گرفته و سپس مساوی صفر قرار می دهیم و برآوردگرها را به صورت زیر به دست می آوریم،

$$\hat{\alpha}_1(\beta_1) = \frac{m_k}{\sum_{i=1}^{k-1} (R_i + 1) \ln (1 + \beta_1 w_i) + m^* \ln (1 + \beta_1 w_k)}, \quad (4)$$

$$\hat{\alpha}_2(\beta_2) = \frac{n_k}{\sum_{i=1}^{k-1} (R_i + 1) \ln (1 + \beta_2 w_i) + n^* \ln (1 + \beta_2 w_k)}, \quad (5)$$

$$\frac{m_k}{\beta_1} = \sum_{i=1}^{k-1} (\hat{\alpha}_1(\beta_1) (R_i + 1) + z_i) \frac{w_i}{1 + \beta_1 w_i} + (\hat{\alpha}_1(\beta_1) m^* + z_k) \frac{w_k}{1 + \beta_1 w_k}, \quad (6)$$

$$\frac{n_k}{\beta_2} = \sum_{i=1}^{k-1} (\hat{\alpha}_2(\beta_2) (R_i + 1) + 1 - z_i) \frac{w_i}{1 + \beta_2 w_i} + (\hat{\alpha}_2(\beta_2) n^* + 1 - z_k) \frac{w_k}{1 + \beta_2 w_k}. \quad (7)$$

۳ برآورد ماکزیمم درستنمایی از طریق الگوریتم EM

الگوریتم EM که اولین بار توسط [۶] ارائه شد ابزاری قدرتمند برای محاسبه برآورد ماکزیمم درستنمایی پارامترهای یک مدل آماری در حضور داده های ناقص، متغیرهای پنهان، توزیع های بریده شده، مشاهدات گروه بندی و یا

سانسور شده است. به خوبی معلوم است که الگوریتم EM همگرایی بهتری نسبت به سایر روش‌های عددی همانند روش نیوتون-رافسون دارد. از آنجایی که در طرح سانسور پیشرونده توام نوع دوم متعادل شده ممکن است داده‌های گمشده وجود داشته باشد می‌توان از الگوریتم EM برای به‌دست آوردن برآوردهای ماکزیمم درستمایی استفاده کرد. اکنون داده‌های ناقص را U و V نشان می‌دهیم، که در آن

$$\begin{aligned} U &= (U_1, U_2, \dots, U_k) & U_i &= (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{iR_i}) & i &= 1, \dots, k, & \text{if } z_i &= 1 \\ & & U_i &= (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{iR_{i+1}}) & i &= 1, \dots, k, & \text{if } z_i &= 0 \\ V &= (V_1, V_2, \dots, V_k) & V_i &= (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iR_{i+1}}) & i &= 1, \dots, k, & \text{if } z_i &= 1 \\ & & V_i &= (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iR_i}) & i &= 1, \dots, k, & \text{if } z_i &= 0 \end{aligned}$$

است. لگاریتم تابع درستمایی برای داده‌های کامل را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$\begin{aligned} l_c &= \ln L_c(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \mathbf{w}) \propto m [\ln \alpha_1 + \ln \beta_1] + n [\ln \alpha_2 + \ln \beta_2] - (\alpha_1 + 1) \sum_{i=1}^{k-1} z_i \ln(1 + \beta_1 w_i) \\ &- (\alpha_2 + 1) \sum_{i=1}^{k-1} (1 - z_i) \ln(1 + \beta_2 w_i) - (\alpha_1 + 1) \sum_{i=1}^{k-1} z_i \sum_{j=1}^{R_i} \ln(1 + \beta_1 u_{ij}) \\ &- (\alpha_2 + 1) \sum_{i=1}^{k-1} (1 - z_i) \sum_{j=1}^{R_i} \ln(1 + \beta_2 v_{ij}) - (\alpha_1 + 1) \sum_{i=1}^{k-1} (1 - z_i) \sum_{j=1}^{R_{i+1}} \ln(1 + \beta_1 u_{ij}) \\ &- (\alpha_2 + 1) \sum_{i=1}^{k-1} z_i \sum_{j=1}^{R_{i+1}} \ln(1 + \beta_2 v_{ij}) - (\alpha_1 + 1) z_k \ln(1 + \beta_1 w_k) - (\alpha_2 + 1) (1 - z_k) \ln(1 + \beta_2 w_k) \\ &- (\alpha_1 + 1) \left[z_k \sum_{j=1}^{m^*-1} \ln(1 + \beta_1 u_{kj}) + (1 - z_k) \sum_{j=1}^{m^*} \ln(1 + \beta_1 u_{kj}) \right] \\ &- (\alpha_2 + 1) \left[(1 - z_k) \sum_{j=1}^{n^*-1} \ln(1 + \beta_2 v_{kj}) + z_k \sum_{j=1}^{n^*} \ln(1 + \beta_2 v_{kj}) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

با توجه به داده‌های کامل، برآوردهای ماکزیمم درستمایی پارامترها را می‌توان همانند قسمت قبل به شکل زیر به‌دست آورد،

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_c}{\partial \alpha_1} &= \frac{m}{\alpha_1} - \sum_{i=1}^{k-1} z_i \ln(1 + \beta_1 w_i) - \sum_{i=1}^{k-1} z_i \sum_{j=1}^{R_i} \ln(1 + \beta_1 u_{ij}) - \sum_{i=1}^{k-1} (1 - z_i) \sum_{j=1}^{R_{i+1}} \ln(1 + \beta_1 u_{ij}) \\ &- z_k \ln(1 + \beta_1 w_k) - \left[z_k \sum_{j=1}^{m^*-1} \ln(1 + \beta_1 u_{kj}) + (1 - z_k) \sum_{j=1}^{m^*} \ln(1 + \beta_1 u_{kj}) \right] = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_c}{\partial \beta_1} &= \frac{m}{\beta_1} - (\alpha_1 + 1) \sum_{i=1}^{k-1} z_i \frac{w_i}{1 + \beta_1 w_i} - (\alpha_1 + 1) \sum_{i=1}^{k-1} z_i \sum_{j=1}^{R_i} \frac{u_{ij}}{1 + \beta_1 u_{ij}} \\ &- (\alpha_1 + 1) \sum_{i=1}^{k-1} (1 - z_i) \sum_{j=1}^{R_{i+1}} \frac{u_{ij}}{1 + \beta_1 u_{ij}} - (\alpha_1 + 1) z_k \frac{w_k}{1 + \beta_1 w_k} \\ &- (\alpha_1 + 1) \left[z_k \sum_{j=1}^{m^*-1} \frac{u_{kj}}{1 + \beta_1 u_{kj}} + (1 - z_k) \sum_{j=1}^{m^*} \frac{u_{kj}}{1 + \beta_1 u_{kj}} \right] = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial l_c}{\partial \alpha_r} = \frac{n}{\alpha_r} - \sum_{i=1}^{k-1} (1 - z_i) \ln(1 + \beta_r w_i) - \sum_{i=1}^{k-1} (1 - z_i) \sum_{j=1}^{R_i} \ln(1 + \beta_r v_{ij}) - \sum_{i=1}^{k-1} z_i \sum_{j=1}^{R_i+1} \ln(1 + \beta_r v_{ij}) - (1 - z_k) \ln(1 + \beta_r w_k) - \left[(1 - z_k) \sum_{j=1}^{n^*-1} \ln(1 + \beta_r v_{kj}) + z_k \sum_{j=1}^{n^*} \ln(1 + \beta_r v_{kj}) \right] = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial l_c}{\partial \beta_r} = \frac{n}{\beta_r} - (\alpha_r + 1) \sum_{i=1}^{k-1} (1 - z_i) \frac{w_i}{1 + \beta_r w_i} - (\alpha_r + 1) \sum_{i=1}^{k-1} (1 - z_i) \sum_{j=1}^{R_i} \frac{v_{ij}}{1 + \beta_r v_{ij}} - (\alpha_r + 1) \sum_{i=1}^{k-1} z_i \sum_{j=1}^{R_i+1} \frac{v_{ij}}{1 + \beta_r v_{ij}} - (\alpha_r + 1) (1 - z_k) \frac{w_k}{1 + \beta_r w_k} - (\alpha_r + 1) \left[(1 - z_k) \sum_{j=1}^{n^*-1} \frac{v_{kj}}{1 + \beta_r v_{kj}} + z_k \sum_{j=1}^{n^*} \frac{v_{kj}}{1 + \beta_r v_{kj}} \right] = 0, \quad (12)$$

همان طور که می دانیم الگوریتم EM دارای دو مرحله E و M است. در مرحله E امید ریاضی شرطی داده های ناکامل را به دست می آوریم و با جایگذاری در رابطه های (9)، (10) و (11) و (12) مرحله M از الگوریتم EM را کامل می کنیم. سپس فرم بسته ای از برآوردگرهای پارامترها را به دست می آوریم. امید ریاضی شرطی داده های گمشده را می توانیم به صورت زیر ارائه دهیم:

$$E[\ln(1 + \beta_l T_{ij,l} | T_{ij,l} > w_i)] = \ln(1 + \beta_l w_i) + \frac{1}{\alpha_l}, \quad (13)$$

$$E\left[\frac{T_{ij,l}}{1 + \beta_l T_{ij,l}} \middle| T_{ij,l} > w_i\right] = \frac{1 + \beta_l (\alpha_l + 1) w_i}{\beta_l (\alpha_l + 1) (1 + \beta_l w_i)},$$

که در آن

$$T_{ij,l} = \begin{cases} u_{ij} & l = 1 \\ v_{ij} & l = 2 \end{cases}$$

می باشد. برای سادگی رابطه (13) را به صورت

$$\varepsilon_1(w_i, \alpha_l, \beta_l) = \ln(1 + \beta_l w_i) + \frac{1}{\alpha_l}, \quad \varepsilon_2(w_i, \alpha_l, \beta_l) = \frac{1 + \beta_l (\alpha_l + 1) w_i}{\beta_l (\alpha_l + 1) (1 + \beta_l w_i)}, \quad (14)$$

می نویسیم. حال با جایگذاری عبارت فوق در رابطه های (9) - (12)، فرم بسته ای برای هر کدام از برآوردگرها به دست می آوریم. برای پارامتر $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ و β_2 برآوردگرها به صورت زیر می باشد:

$$\hat{\alpha}_1 = \left\{ \frac{1}{m} \left[\sum_{i=1}^{k-1} z_i \ln(1 + \hat{\beta}_1 w_i) + \sum_{i=1}^{k-1} z_i \sum_{j=1}^{R_i} \varepsilon_1(w_i, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1) + \sum_{i=1}^{k-1} (1 - z_i) \sum_{j=1}^{R_i+1} \varepsilon_1(w_i, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1) + z_k \ln(1 + \hat{\beta}_1 w_k) + z_k \sum_{j=1}^{m^*-1} \varepsilon_1(w_k, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1) + (1 - z_k) \sum_{j=1}^{m^*} \varepsilon_1(w_k, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1) \right] \right\}^{-1} \quad (15)$$

$$\hat{\beta}_1 = \left\{ \frac{1}{m} \left[(\hat{\alpha}_1 + 1) \sum_{i=1}^{k-1} z_i \frac{w_i}{1 + \hat{\beta}_1 w_i} + (\hat{\alpha}_1 + 1) \sum_{i=1}^{k-1} z_i \sum_{j=1}^{R_i} \varepsilon_{\gamma} (w_i, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1) \right. \right. \\ \left. \left. + (\hat{\alpha}_1 + 1) \sum_{i=1}^{k-1} (1 - z_i) \sum_{j=1}^{R_i+1} \varepsilon_{\gamma} (w_i, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1) + (\hat{\alpha}_1 + 1) z_k \frac{w_k}{1 + \hat{\beta}_1 w_k} \right. \right. \\ \left. \left. + (\hat{\alpha}_1 + 1) \left(z_k \sum_{j=1}^{m^*-1} \varepsilon_{\gamma} (w_k, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1) + (1 - z_k) \sum_{j=1}^{m^*} \varepsilon_{\gamma} (w_k, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1) \right) \right] \right\}^{-1} \quad (16)$$

$$\hat{\alpha}_{\gamma} = \left\{ \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^{k-1} (1 - z_i) \ln (1 + \hat{\beta}_{\gamma} w_i) + \sum_{i=1}^{k-1} (1 - z_i) \sum_{j=1}^{R_i} \varepsilon_{\gamma} (w_i, \hat{\alpha}_{\gamma}, \hat{\beta}_{\gamma}) + \sum_{i=1}^{k-1} z_i \sum_{j=1}^{R_i+1} \varepsilon_{\gamma} (w_i, \hat{\alpha}_{\gamma}, \hat{\beta}_{\gamma}) \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - z_k) \ln (1 + \hat{\beta}_{\gamma} w_k) + (1 - z_k) \sum_{j=1}^{n^*-1} \varepsilon_{\gamma} (w_k, \hat{\alpha}_{\gamma}, \hat{\beta}_{\gamma}) + z_k \sum_{j=1}^{n^*} \varepsilon_{\gamma} (w_k, \hat{\alpha}_{\gamma}, \hat{\beta}_{\gamma}) \right] \right\}^{-1} \quad (17)$$

$$\hat{\beta}_{\gamma} = \left\{ \frac{1}{n} \left[(\hat{\alpha}_{\gamma} + 1) \sum_{i=1}^{k-1} (1 - z_i) \frac{w_i}{1 + \hat{\beta}_{\gamma} w_i} + (\hat{\alpha}_{\gamma} + 1) \sum_{i=1}^{k-1} (1 - z_i) \sum_{j=1}^{R_i} \varepsilon_{\gamma} (w_i, \hat{\alpha}_{\gamma}, \hat{\beta}_{\gamma}) \right. \right. \\ \left. \left. + (\hat{\alpha}_{\gamma} + 1) \sum_{i=1}^{k-1} z_i \sum_{j=1}^{R_i+1} \varepsilon_{\gamma} (w_i, \hat{\alpha}_{\gamma}, \hat{\beta}_{\gamma}) + (\hat{\alpha}_{\gamma} + 1) (1 - z_k) \frac{w_k}{1 + \hat{\beta}_{\gamma} w_k} \right. \right. \\ \left. \left. + (\hat{\alpha}_{\gamma} + 1) \left((1 - z_k) \sum_{j=1}^{n^*-1} \varepsilon_{\gamma} (w_k, \hat{\alpha}_{\gamma}, \hat{\beta}_{\gamma}) + z_k \sum_{j=1}^{n^*} \varepsilon_{\gamma} (w_k, \hat{\alpha}_{\gamma}, \hat{\beta}_{\gamma}) \right) \right] \right\}^{-1} \quad (18)$$

۱.۳ فواصل اطمینان تقریبی

مشابه [۱] و [۷] و بر اساس ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده بر اساس برآوردهای ماکزیمم درستنمایی به دست آمده از طریق الگوریتم EM، می توان فاصله اطمینان تقریبی را برای پارامترهای $\alpha_1, \beta_1, \alpha_{\gamma}$ و β_{γ} به صورت زیر به دست آورد،

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\hat{\alpha}_1 - z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\alpha}_1)}, \hat{\alpha}_1 + z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\alpha}_1)} \right) \\ \left(\hat{\beta}_1 - z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\beta}_1)}, \hat{\beta}_1 + z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\beta}_1)} \right) \\ \left(\hat{\alpha}_{\gamma} - z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\alpha}_{\gamma})}, \hat{\alpha}_{\gamma} + z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\alpha}_{\gamma})} \right) \\ \left(\hat{\beta}_{\gamma} - z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\beta}_{\gamma})}, \hat{\beta}_{\gamma} + z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\beta}_{\gamma})} \right) \end{array} \right.$$

که در آن $z_{\alpha/2}$ ، صدک $100(\alpha/2)$ توزیع نرمال استاندارد است.

۲.۳ فواصل اطمینان بوت استرپ

برای پیدا کردن فواصل اطمینان پارامتریک بوت استرپ در فرم Bootst-p الگوریتم زیر را داریم

مرحله ۱: بر اساس نمونه اولیه برآوردگر $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ را از (۱۵) - (۱۸) به دست می آوریم.

مرحله ۲: نمونه بوت استرپ (W^*, Z^*) تحت طرح سانسور نوع دوم توام پیشرونده متعادل و فرضیات لازم تولید می گردند.

مرحله ۳: برآوردگرهای درستنمایی بوت استرپ را برای همه‌ی پارامترها به دست می آوریم.

مرحله ۴: مرحله ۳ را B -بار تکرار نموده و مجموع برآوردهای زیر به دست می آیند،

$$\{\hat{\theta}_1^*, \dots, \hat{\theta}_B^*\}, \quad j = 1, \dots, k,$$

سپس نمونه بوت استرپ بالا را به صورت $1 \leq j \leq k$, $\{\hat{\theta}_{(1)}^*, \dots, \hat{\theta}_{(B)}^*\}$ مرتب می نماییم.

بوت-p: فرض کنید $k_{jB}(x) = p(\hat{\theta}_j^* \leq x)$. بر اساس مقدار مفروض x ، تعریف می کنیم $\hat{\theta}_{jB}(x) = k_{jB}^{-1}(x)$. حال فاصله اطمینان در سطح $1 - \alpha$ درصد برای θ_j به صورت $(\hat{\theta}_{jB}(\frac{\alpha}{2}), \hat{\theta}_{jB}(1 - \frac{\alpha}{2}))$ خواهد بود. استفاده از مطالعه شبیه سازی و یک مثال واقعی می توان کارایی و کاربست مطالب و روش های ارائه در قسمت های مورد سنجش و ارزیابی قرار داد.

۴ شبیه سازی

در این بخش برای ارزیابی نتایج به دست آمده در بخش های قبل به مطالعه شبیه سازی می پردازیم. فرض می کنیم k تعداد مشاهدات شکست به دست آمده در آزمایش طول عمر و بر اساس طرح های سانسور داده شده در جدول ۱ باشد. بر اساس طرح های ارائه شده در جدول ۱ متوسط برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم و میانگین مربعات خطا در روش الگوریتم EM در جدول ۲ ارائه گردیده است. همچنین جهت تغییرپذیری نتایج حاصل از شبیه سازی، ۱۰۰۰ مرتبه روند شبیه سازی را تکرار می کنیم. بر اساس جدول ۲ مشاهده می کنیم که برآورد پارامترها از نظر میانگین و میانگین مربعات خطا عملکرد رضایت بخشی دارند. بر اساس این نتایج، مشاهده می شود که برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم ارتباط مستقیمی با نوع طرح سانسور توام متعادل دارد. می توان مشاهده کرد که برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم میزان اریبی منطقی وقتی حجم نمونه مشاهده شده k کوچک است را دارا می باشد و این اریبی وقتی حجم نمونه به دست آمده از جامعه ها افزایش می یابند، به سمت صفر همگرا است. همچنین زمانی که حجم دو جامعه برابر نیستند، برآوردها دارای اریبی بسیار کمی می باشد که نشان دهنده کارایی مدل در این شرایط است.

جدول ۱. طرح‌های سانسور برای شبیه سازی

$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = (2, 3, 3, 5)$	طرح سانسور برای	R	k	(m, n)
	[۱۱۱]	(۱۹)	۱۰	(۳۰, ۳۰)
	[۱۱۲]	(۲۹)	۱۰	(۳۰, ۳۰)
	[۱۲۱]	(۱۵, ۰۹)	۱۵	(۴۰, ۴۰)
	[۱۲۲]	(۱۱۴)	۱۵	(۴۰, ۴۰)
	[۱۳۱]	(۱۶, ۰۱۳)	۲۰	(۵۰, ۵۰)
	[۱۳۲]	(۲۷, ۱, ۰۱۱)	۲۰	(۵۰, ۵۰)
	[۱۴۱]	(۱۸, ۰۱۶)	۲۵	(۶۰, ۶۰)
	[۱۴۲]	(۲۸, ۰۱۶)	۲۵	(۶۰, ۶۰)
	[۱۵۱]	(۱۸, ۰۱۶)	۲۵	(۶۰, ۵۰)
	[۱۵۲]	(۲۸, ۰۱۶)	۲۵	(۶۰, ۵۰)

جدول ۲. برآوردگرهای درست‌نمایی ماکزیمم تحت طرح‌های سانسور متفاوت جدول ۱

$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = (2, 3, 3, 5)$					
$\hat{\beta}_2$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}_1$	طرح سانسور	
۴/۹۴۸۱	۳/۲۸۸۴	۲/۹۵۸۰	۲/۱۵۳۸	Mean	۱۱۱
۰/۰۷۲۲	۱/۱۱۷۰	۰/۰۴۵۶	۰/۰۵۶۷۰	MSE	
۵/۵۲۱۵	۳/۲۷۰۱	۲/۹۷۱۸	۲/۱۹۷۱	Mean	۱۱۲
۰/۰۲۰۶	۱/۳۵۹۰	۰/۱۱۲۷	۰/۰۷۱۳۴	MSE	
۴/۹۶۳۵	۳/۲۸۱۷	۲/۹۷۴۶	۲/۱۶۲۳	Mean	۱۲۱
۰/۰۱۷۸	۰/۷۲۶۰	۰/۰۳۵۰	۰/۰۳۸۸۹	MSE	
۴/۹۶۳۵	۳/۲۸۱۷	۲/۹۴۲۵	۲/۰۶۸۱	Mean	۱۲۲
۰/۰۱۴۷	۰/۷۰۵۵	۰/۰۳۳۶	۰/۰۲۷۹۸	MSE	
۴/۹۶۰۷	۳/۲۳۴۶	۲/۹۶۸۹	۲/۱۳۲۷	Mean	۱۳۱
۰/۰۱۲۶	۰/۵۱۱۸	۰/۰۲۸۴	۰/۰۲۸۷۳	MSE	
۴/۹۴۸۹	۳/۲۳۶۴	۲/۹۶۱۶	۲/۱۲۰۸	Mean	۱۳۲
۰/۰۱۳۰	۰/۵۳۱۲	۰/۰۲۵۰	۰/۰۲۷۵۶	MSE	
۴/۹۶۱۶	۳/۲۱۵۷	۲/۹۶۶۹	۲/۱۱۱۷	Mean	۱۴۱
۰/۰۱۱۲	۰/۳۸۰۱	۰/۰۲۲۱	۰/۰۲۰۳۹	MSE	
۴/۹۵۶۰	۳/۲۴۵۱	۲/۹۸۲۰	۲/۱۶۸۴	Mean	۱۴۲
۰/۰۱۰۸	۰/۴۴۷۷	۰/۰۲۲۴	۰/۰۲۶۵۲	MSE	
۴/۹۶۹۶	۳/۳۴۰۴	۲/۹۷۱۳	۲/۱۲۷۶	Mean	۱۵۱
۰/۰۱۱۹	۰/۵۶۷۷	۰/۰۲۰۲	۰/۰۱۹۷۹	MSE	
۴/۹۵۷۷	۳/۴۰۷۹	۲/۹۸۱۷	۲/۱۷۳۱	Mean	۱۵۲
۰/۰۱۲۴	۰/۶۸۱۵	۰/۰۱۸۹	۰/۰۲۰۵۸	MSE	

همچنین فواصل اطمینان جانبی و بوت استرپ بر اساس طرح‌های سانسور متفاوت در جدول ۱، ارائه شده است. همان گونه که از جدول ۴ مشخص است، می‌توان دید که بر اساس طرح‌های سانسور توام متعادل طول فواصل اطمینان تغییر یافته و در مجموع فواصل اطمینان بوت استرپ دارای طول کوتاه‌تری نسبت به فاصله اطمینان

جدول ۳. فاصله اطمینان مجانبی و بوت استرپ تحت طرح های سانسور متفاوت ارائه شده در جدول ۱.

$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = (2, 3, 3, 5)$					
β_2	α_2	β_1	α_1	طرح سانسور	
(۰/۵۸۷, ۸/۲۵۱)	(۰/۹۸۵, ۶/۸۷۱)	(۰/۰۴۹, ۵/۸۹۱)	(۰/۱۵۰, ۴/۴۷۸)	Approximate	۱۱۱
(۳/۶۸۷, ۷/۵۸۷)	(۲/۱۸۳, ۴/۲۱۸)	(۲/۵۸۷, ۵/۸۹۲)	(۱/۲۵۱, ۳/۱۴۸)	Boot-p	
(۰/۹۹۷, ۹/۲۰۱)	(۰/۶۸۵, ۵/۷۰۱)	(۰/۵۴۹, ۵/۵۴۱)	(۰/۰۵۰, ۳/۹۷۸)	Approximate	۱۱۲
(۳/۲۵۷, ۶/۱۱۷)	(۱/۱۷۳, ۴/۶۳۰)	(۲/۲۱۵, ۵/۰۸۷)	(۰/۹۸۰, ۳/۸۸۸)	Boot-p	
(۱/۹۸۷, ۸/۳۹۱)	(۱/۰۰۸, ۵/۱۵۸)	(۱/۲۱۰, ۵/۲۱۳)	(۰/۹۹۰, ۴/۱۹۹)	Approximate	۱۲۱
(۳/۴۸۵, ۶/۳۸۰)	(۲/۳۶۹, ۴/۱۵۸)	(۲/۰۸۷, ۵/۱۰۵)	(۱/۴۹۸, ۳/۸۵۸)	Boot-p	
(۱/۵۵۴, ۸/۳۲۱)	(۲/۲۱۸, ۶/۲۵۸)	(۱/۸۵۰, ۵/۵۸۹)	(۱/۵۸۴, ۴/۵۵۱)	Approximate	۱۲۲
(۳/۸۸۵, ۶/۵۹۹)	(۲/۱۷۳, ۵/۳۲۱)	(۲/۷۰۲, ۳/۴۴۳)	(۱/۵۳۱, ۴/۰۵۶)	Boot-p	
(۲/۱۰۴, ۷/۹۳۱)	(۲/۰۴۸, ۶/۲۵۸)	(۲/۱۲۴, ۵/۹۹۰)	(۱/۲۵۴, ۴/۳۲۱)	Approximate	۱۳۱
(۳/۵۷۶, ۶/۵۸۷)	(۲/۱۷۵, ۴/۸۵۳)	(۲/۷۰۵, ۳/۴۱۲)	(۱/۵۴۴, ۳/۹۵۷)	Boot-p	
(۳/۲۹۸, ۸/۰۳۱)	(۲/۱۳۳, ۶/۸۵۹)	(۲/۰۰۴, ۵/۵۴۰)	(۱/۲۰۴, ۴/۸۵۲)	Approximate	۱۳۲
(۳/۶۰۵, ۵/۹۸۳)	(۲/۲۳۷, ۴/۹۳۵)	(۲/۷۳۷, ۳/۴۴۷)	(۱/۵۹۸, ۴/۰۰۲)	Boot-p	
(۳/۲۹۸, ۸/۰۳۱)	(۲/۱۳۳, ۶/۸۵۹)	(۲/۰۰۴, ۵/۵۴۰)	(۱/۹۶۳, ۳/۱۲۵)	Approximate	۱۴۱
(۴/۶۰۲, ۵/۲۹۳)	(۲/۳۰۸, ۴/۸۸۲)	(۲/۷۵۸, ۳/۹۷۷)	(۱/۱۶۸, ۴/۰۵۲)	Boot-p	
(۳/۹۸۱, ۹/۳۲۲)	(۲/۸۵۰, ۵/۶۲۱)	(۲/۷۵۶, ۵/۲۵۴)	(۲/۲۱۸, ۳/۹۲۲)	Approximate	۱۵۱
(۳/۶۳۷, ۶/۲۹۱)	(۲/۲۶۰, ۵/۶۹۵)	(۲/۷۳۸, ۴/۴۷۵)	(۱/۶۰۰, ۴/۸۵۶)	Boot-p	
(۳/۴۵۱, ۹/۳۲۸)	(۲/۱۴۹, ۵/۲۵۸)	(۲/۰۲۱, ۵/۹۸۷)	(۲/۰۰۸, ۳/۱۴۴)	Approximate	۱۵۲
(۳/۵۰۶, ۶/۳۰۹)	(۳/۳۲۶, ۵/۸۸۳)	(۲/۷۹۲, ۴/۴۲۴)	(۱/۷۱۵, ۴/۵۶۱)	Boot-p	

۵ مثال کاربردی

در این بخش برای ارزیابی کارایی مطالب ارائه شده، داده های سرطان مثانه که در [۱] با توزیع لوماکس مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است، استفاده می کنیم. این داده ها نشان دهنده زمان بهبودی (بر حسب ماه) ۱۲۸ بیمار مبتلا به سرطان مثانه است. برای نشان دادن یافته های مقاله، با استفاده از نمونه گیری تصادفی ۴۰ نمونه انتخاب کرده و به عنوان جامعه اول در نظر گرفته و ۸۸ نمونه باقی مانده را به عنوان جامعه دوم در نظر می گیریم. مقادیر اولیه پارامترها در الگوریتم EM را برابر برآوردهای ماکزیمم درستنمایی قرار می دهیم. بر اساس طرح های سانسور پیشرونده توام متعادل شده $R = (1_{(1,0)}, 0_{(9)})$ و $R = (2_{(1,0)}, 0_{(9)})$ و $R = (1_{(1,9)})$ با فرض تعداد شکست های $k = 20$ ، مقادیر برآورد پارامترها، فاصله اطمینان تقریبی و فاصله اطمینان بوت استرپ در جدول ۴ گزارش شده است.

جدول ۴. مقادیر برآورد پارامترها، فواصل اطمینان تقریبی و فواصل اطمینان بوت استرپ تحت طرح‌های سانسور متفاوت برای داده‌های سرطان مثانه

$\hat{\beta}_2$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}_1$		r	R
۰/۰۲۷۱	۳/۲۳۳۴	۰/۰۰۹۱	۹/۶۷۸۸	Mean	۲۰	(۱۱, ۰۹)
(۰/۰۰۰۰, ۰/۲۶۹۰)	(۰/۰۰۰۰, ۱۰/۲۸۹۳)	(۰/۰۰۰۰, ۰/۱۰۸۶)	(۰/۰۰۰۰, ۴۵/۱۰۸۰)	Approximate		
(۰/۰۱۲۳, ۰/۰۷۸۱)	(۱/۲۱۵۶, ۴/۵۴۸۹)	(۰/۰۰۵۸, ۰/۰۵۸۹)	(۸/۱۴۵۹, ۱۲/۵۳۱۸)	Boot-p		
۰/۰۲۵۹	۲/۸۸۲۳	۰/۰۰۸۹	۸/۴۲۴۸	Mean	۲۰	(۲۱, ۰۹)
(۰/۰۰۰۰, ۰/۲۶۵۸)	(۰/۰۰۰۰, ۹/۹۸۵۳)	(۰/۰۰۰۰, ۰/۱۲۵۴)	(۰/۰۰۰۰, ۴۸/۱۴۵۲)	Approximate		
(۰/۰۲۵۹, ۰/۰۹۳۲)	(۱/۵۴۶۳, ۴/۵۹۹۶)	(۰/۰۰۴۴, ۰/۰۳۱۲)	(۶/۹۵۷۴, ۱۰/۲۵۴۸)	Boot-p		
۰/۰۲۶۲	۲/۸۰۷۷	۰/۰۰۹۰	۱۱/۴۲۰۲	Mean	۲۰	(۱۱)
(۰/۰۰۰۰, ۰/۲۳۶۴)	(۰/۰۰۰۰, ۹/۹۵۶۳)	(۰/۰۰۰۰, ۰/۱۲۷۸)	(۰/۰۰۰۰, ۵۲/۴۵۸۹)	Approximate		
(۰/۰۲۱۱, ۰/۰۸۹۲)	(۱/۴۵۲۱, ۴/۲۵۷۳)	(۰/۰۰۲۵, ۰/۰۴۳۰۱)	(۷/۱۲۵۴, ۱۳/۲۵۸۹)	Boot-p		

با توجه به جدول ۴ مقادیر برآورد پارامترهای داده‌های سرطان مثانه تحت طرح‌های سانسور متفاوت تقریباً نزدیک به یکدیگر می‌باشند و فواصل اطمینان مقدار برآورد را پوشش می‌دهند. همان طور که از جدول ۴ مشخص است، طول فواصل اطمینان بوت استرپ کوتاه‌تر از طول فواصل اطمینان مجانبی می‌باشد و حد پایین فواصل اطمینان مجانبی شامل صفر می‌باشد. به طور کلی به دلیل کوتاه‌تر بودن طول فواصل اطمینان بوت استرپ، استفاده از این فواصل اطمینان برای استنباط در مورد پارامترها توصیه می‌شود.

مراجع

- [1] Asar, Y., Belaghi, R.A., (2020). *Inference for two Lomax populations under joint type-II censoring*. Communications in Statistics - Simulation and Computation 51(11): 6808-6825.
- [2] Mondal, S., Kundu D. (2019), *A new two sample type-II progressive censoring scheme*. Communication in Statistics-Theory and Methods 48, 2602–2618.
- [3] Doostparast, M., Ahmadi, M. V. and Ahmadi, J. (2013). *Bayes estimation based on joint progressive type II censored data under linex loss function*. Communications in Statistics-Simulation and Computation 42(8): 1865-1886.
- [4] Balakrishnan, N. (2007). *Progressive censoring methodology: An appraisal (with Discussions)*. Test 16: 211-296.
- [5] Rasouli, A., and Balakrishnan. N. (2010). *Exact likelihood inference for two exponential populations under joint progressive type-II censoring*. Communications in Statistics-Theory and Methods 39: 2172-2191.
- [6] Dempster, A., Lird, N., Rubin, D. (1977). *Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM algorithm*. Journal of the Royal Statistical Society 39(1): 1-38.
- [7] Helu, A., Samawi, H. and Raqab, M. Z., (2015). *Estimation on Lomax progressive censoring using the EM algorithm*. Journal of Statistical Computation and Simulation 85(5): 1035–52.



مسئله بهینه‌سازی در سیستم‌های موازی با تعداد مؤلفه‌های ثابت و تصادفی

زعیم زاده، م^۱ و احمدی، ج^۲

^{۱،۲} گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

در این مقاله، مسئله بهینه‌سازی با اعمال سیاست پیشگیرانه جایگذاری سنی در سیستم‌های موازی با تعداد مؤلفه‌های ثابت و تصادفی مطالعه شده است. تابع دسترس‌پذیری به عنوان معیار بهینه‌سازی مورد استفاده قرار گرفت. نتایج به صورت تحلیلی و عددی برای حالتی که توزیع طول عمر مؤلفه‌های سیستم وایبل با تعداد مؤلفه‌های ثابت و همچنین تعداد مؤلفه‌ها دارای توزیع پواسن بریده‌شده در صفر باشد، ارائه شده است.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی، توزیع پواسن بریده‌شده در صفر، توزیع وایبل، سیستم موازی، دسترس‌پذیری

۱ مقدمات و مفاهیم

افزایش کارایی کارکرد سیستم، چگونگی نگهداری و انجام تعمیرات پیشگیرانه، تعیین سیاست‌های مناسب برای زمان‌های بازدید و تعویض سیستم از جمله موضوعات مهم در مسئله بهینه‌سازی در مباحث قابلیت اعتماد است که تحقیقات زیادی در این زمینه‌ها انجام شده است. از جمله می‌توان به کارهای انجام شده توسط [۲] اشاره کرد. یک سیستم با n مؤلفه را در نظر بگیرید، به طوری که سیستم از کار می‌افتد، اگر و تنها اگر k مؤلفه از n مؤلفه آن از کار بیفتد. در مطالعات قابلیت اعتماد به این نوع سیستم‌ها، F سیستم‌های k از n می‌گویند. سیستم‌های سری و موازی حالت‌های خاص F سیستم k از n هستند، که به ترتیب به‌ازای $k=1$ و $k=n$ به‌دست می‌آیند. همانطور که ذکر شد یکی از مباحث مهم در قابلیت اعتماد، بحث نگهداری و تعمیرات سیستم‌ها است که به منظور

^۱ mo.zaeemzadeh@mail.um.ac.ir

^۲ ahmadi-j@um.ac.ir

کاهش وقوع شکست سیستم و یا برگرداندن یک سیستم از کار افتاده به حالت فعال انجام می‌شود که این امر باعث کاهش اتلاف زمان و از دست رفتن منابع می‌شود. در مباحث قابلیت اعتماد، الگوهای نگهداری و تعمیر به دو گروه عمده الگوهای نگهداری اصلاحی و الگوهای نگهداری پیشگیرانه تقسیم می‌شوند که الگوهای نگهداری اصلاحی پس از رخداد خرابی صورت می‌گیرد و شامل کلیه اقداماتی است که برای بازگرداندن یک سیستم غیرفعال به وضعیت فعال انجام می‌شود. الگوهای نگهداری پیشگیرانه در زمان فعال بودن سیستم انجام می‌شوند و شامل تمامی اقدامات انجام شده به منظور حفظ و نگهداری سیستم در شرایط خاص با استفاده از انجام امور بازرسی و پیشگیری از خرابی‌های اولیه به صورت اصولی و طبق قواعدی ویژه است. در واقع الگوهای پیشگیرانه برای کاهش فشار و استرس روی سیستم است تا احتمال رخداد خرابی در سیستم را کاهش دهد. برای مطالعه بیشتر به [۱] رجوع کنید. یکی از شیوه‌های نگهداری پیشگیرانه جایگذاری سنی استاندارد به صورت زیر تعریف می‌شود. فرض کنید در زمان $t = 0$ سیستم شروع به کار می‌کند. در جایگذاری سنی سیستم در زمان شکست و یا هنگامی که سیستم به سن T رسید (هرکدام که زودتر رخ دهد) جایگذاری می‌شود.

بنابراین یکی از موضوعات مورد توجه در بحث نگهداری و تعمیر سیستم‌ها یافتن زمان بهینه برای جایگذاری سیستم است. مسئله بهینه‌سازی را می‌توان براساس معیارهای مختلفی بررسی نمود. به طور مثال [۶] در سیستم‌های موازی زمانی که تعداد مؤلفه‌ها ثابت ولی نامعلوم است، زمان جایگذاری بهینه را با مینیم کردن میانگین نرخ هزینه محاسبه کرده‌اند. بهینه‌سازی براساس معیار تابع هزینه در سیستم‌های منسجم توسط [۴] مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. شایان ذکر است که در دنیای امروز، چون سیستم‌های واقعی پیچیده و تعداد مؤلفه‌های آن‌ها زیاد می‌باشد، ممکن است تعداد دقیق مؤلفه‌ها را ندانیم. در چنین حالتی می‌توان تعداد مؤلفه‌ها را متغیر تصادفی فرض کرد. این مسئله، مشابه تصادفی بودن اندازه نمونه است که در بسیاری از مسائل کاربردی، در آمار و احتمال، فرآیندهای تصادفی و سیستم‌های صف‌بندی مطرح می‌شود. در سیستم‌های موازی با تعداد مؤلفه‌های تصادفی تعداد بهینه مؤلفه‌ها و زمان جایگذاری بهینه سیستم توسط محققین زیادی از جمله [۳] مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. [۳] زمان جایگذاری بهینه را با مینیم کردن میانگین نرخ هزینه محاسبه کرده است.

در این مقاله، الگوهای نگهداری پیشگیرانه و به طور ویژه جایگذاری سنی مد نظر است و هدف اصلی این مقاله، تعیین زمان جایگذاری بهینه سیستم در سیستم‌های موازی با تعداد مؤلفه‌های ثابت و تصادفی است. منطقی است برای این منظور باید معیار بهینگی مناسبی تعریف شود. هدف مسئله در این مطالعه یافتن زمان جایگذاری بهینه براساس معیار تابع دسترس‌پذیری است. در واقع زمان T ای را مشخص می‌کنیم که تابع دسترس‌پذیری را ماکزیمم کند.

تابع نرخ خطر یکی از معیارهای معروف در قابلیت اعتماد برای مطالعه سالخوردگی سیستم است. اگر T متغیر تصادفی پیوسته طول عمر با تابع چگالی احتمال و توزیع احتمال به ترتیب f و F و تکیه گاه S_T باشد، آنگاه تابع نرخ خطر در حالت پیوسته به صورت $h(t) = \frac{f(t)}{F(t)}$ است. در این مطالعه فرض می‌کنیم که تابع نرخ خطر $h(t)$ پیوسته، بر حسب t تابع صعودی و $h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ است، همچنین توزیع طول عمر مؤلفه‌ها را وایبل در نظر می‌گیریم. یادآوری می‌شود که، توزیع وایبل یکی از معروف‌ترین مدل‌های طول عمر است که به دلیل انعطاف‌پذیری آن، کاربردهای فراوانی در تحلیل داده‌های قابلیت اعتماد و تحلیل بقاء دارد و شامل توزیع‌های نمایی و رایلی نیز است. متغیر تصادفی T دارای توزیع وایبل با پارامترهای α و β است و با علامت $W(\alpha, \beta)$ نشان می‌دهند، اگر تابع توزیع احتمال آن به صورت

$$F(t) = 1 - \exp\{-(\alpha t)^\beta\}, \quad t > 0, \alpha > 0, \beta > 0,$$

باشد. در اینجا α پارامتر مقیاس و β پارامتر شکل توزیع است. تابع نرخ خطر توزیع وایبل به صورت $h(t) = \beta\alpha^\beta t^{\beta-1}$ است. واضح است که به ازای $\beta < 1$ ، $\beta = 1$ و $\beta > 1$ تابع نرخ خطر توزیع وایبل به ترتیب نزولی، ثابت و صعودی است.

ادامه مقاله بدین صورت تنظیم شده است که، در بخش ۲ تابع دسترس پذیری مورد نظر به طور مختصر معرفی می شود. بخش ۳ شامل زمان تعویض بهینه در سیستم های موازی با تعداد مؤلفه های ثابت با استفاده از تابع دسترس پذیری است که نتایج در حالت کلی و زمانی که توزیع طول عمر مؤلفه های سیستم وایبل باشد، ارائه می شوند. در بخش ۴ به مطالعه زمان تعویض بهینه در سیستم های موازی با تعداد مؤلفه های تصادفی با استفاده از تابع دسترس پذیری می پردازیم و زمان جایگذاری بهینه سیستم وقتی که تعداد مؤلفه ها دارای توزیع پواسن بریده شده در صفر و توزیع طول عمر مؤلفه ها وایبل باشد، ارائه می گردد و در انتها خلاصه ای از جمع بندی ارائه شده است.

۲ تابع دسترس پذیری

دسترس پذیری یکی از شاخص های مهم در نظریه قابلیت اعتماد، نگهداری و تعمیر سیستم ها، است که معمولاً به عنوان یک عامل برای اطمینان در عملکرد سیستم شناخته می شود و زمانی که قابلیت اعتماد سیستم افزایش یابد، دسترس پذیری آن نیز افزایش می یابد. نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه از سیستم های مهندسی می تواند باعث افزایش دسترس پذیری شود. در منابع مختلف دسترس پذیری به صورت های متنوعی تعریف شده است که از این میان می توان به دسترس پذیری نقطه ای، دسترس پذیری بازه ای، دسترس پذیری بازه ای حدی، دسترس پذیری چند دوره ای اشاره کرد. به عنوان مثال به [۷] مراجعه شود. در این مطالعه، دسترس پذیری بازه ای حدی که در ادامه به اختصار دسترس پذیری نامیده می شود، مورد استفاده قرار می گیرد و با نسبت

$$AV = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR}, \quad (1)$$

محاسبه می شود، که در آن $MTTF$ نشان دهنده میانگین زمان کارکرد سیستم تا جایگذاری و $MTTR$ میانگین زمان برای جایگذاری سیستم است که هر دوی آنها اعداد مثبت هستند و در نتیجه $0 < AV < 1$.

۳ زمان تعویض بهینه در سیستم های موازی با تعداد مؤلفه های ثابت با استفاده از تابع دسترس پذیری

فرض کنید یک سیستم موازی با تعداد n مؤلفه در اختیار داریم، با فرض این که X_i نشان دهنده طول عمر مؤلفه i ام ($i \geq 1$) باشد، طول عمر سیستم موازی برابر با $T_P = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ است. همچنین فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی طول عمر مؤلفه ها، مستقل از هم با تابع توزیع مشترک $F(t)$ هستند. اگر سیستم در زمان ثابت T ($T > 0$) یا در زمان خرابی هر کدام که زودتر اتفاق بیفتد، جایگذاری شود آنگاه زمان جایگذاری سیستم (طول عمر سیستم با سیاست معرفی شده) برابر با $T_S = \min\{T_P, T\}$ است. شایان ذکر است که T_S یک متغیر تصادفی پیوسته نیست به دلیل اینکه در نقطه T جرم احتمال مثبت برابر

$$P(T_S = T) = \bar{F}_{T_P}(T),$$

دارد. تابع قابلیت اعتماد طول عمر سیستم، به ازای $u < T$ ، به صورت

$$\bar{F}_{T_S}(u) = 1 - F^n(u), \quad n = 1, 2, \dots,$$

قابل محاسبه است. در نتیجه میانگین زمان تا از کار افتادگی سیستم (متوسط طول عمر سیستم) برابر است با

$$MTTF = \mu_n(T) = \int_0^T (1 - F^n(u)) du, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

فرض کنید میانگین زمان برای جایگذاری سیستم با یک سیستم جدید در حالت جایگذاری برنامه‌ریزی نشده (جایگذاری در زمان شکست) برابر با μ_F و این زمان برای جایگذاری پیشگیرانه (در زمان T) برابر با μ_P باشد ($\mu_P < \mu_F$)، در اینصورت میانگین زمان برای جایگذاری سیستم برابر با

$$MTTR = \mu_P \bar{F}_{T_S}(T) + \mu_F (1 - \bar{F}_{T_S}(T)), \quad (3)$$

است. با قرار دادن (2) و (3) در (1)، تابع دسترس‌پذیری به صورت تابعی از T قابل نوشتن است، یعنی

$$AV(T) = \frac{\int_0^T (1 - F^n(u)) du}{\int_0^T (1 - F^n(u)) du + \mu_P + (\mu_F - \mu_P) F^n(T)}. \quad (4)$$

هدف از این مطالعه به دست آوردن زمان جایگذاری بهینه براساس تابع دسترس‌پذیری است. مقدار بهینه این تابع با T^* نشان داده می‌شود که نقطه ماکزیمم کننده تابع دسترس‌پذیری است. چون تابع دسترس‌پذیری نسبت به T مشتق‌پذیر است، بنابراین برای دستیابی به زمان جایگذاری بهینه، می‌توانیم از روش اکستریم نسبی استفاده کنیم. مشتق تابع $AV(T)$ نسبت به T برابر است با

$$\frac{d}{dT} AV(T) = \frac{(\mu_P - \mu_F)[nf(T)F^{n-1}(T)\mu_n(T) - F^n(T)(1 - F^n(T))] + \mu_P(1 - F^n(T))}{(\int_0^T (1 - F^n(u)) du + \mu_P + (\mu_F - \mu_P) F^n(T))^2}. \quad (5)$$

بنابراین زمان جایگذاری بهینه، در صورت وجود، در معادله $\frac{d}{dT} AV(T) = 0$ صدق می‌کند. در اینصورت با توجه به (5) و برابر با صفر قرار دادن آن، عبارت زیر به دست می‌آید

$$H_1(T)\mu_n(T) - F^n(T) = \frac{\mu_P}{\mu_F - \mu_P}, \quad (6)$$

که در آن

$$H_1(T) = \frac{nh(T)[F^{n-1}(T) - F^n(T)]}{1 - F^n(T)},$$

است. اگر قرار دهیم

$$g(T) = H_1(T)\mu_n(T) - F^n(T), \quad (7)$$

و $c = \frac{\mu_P}{\mu_F - \mu_P}$ که c عددی بزرگتر از صفر است و به T بستگی ندارد، واضح است که علامت $\frac{d}{dT} AV(T)$ به علامت عبارت $c - g(T)$ بستگی دارد.

لم زیر را درباره یکنوایی تابع $g(T)$ داریم. برای جزئیات به [6] مراجعه شود.

لم ۱۰۳. اگر نرخ خطر مؤلفه تابع صعودی باشد، آنگاه $g(T)$ داده شده در (7) تابع اکیداً صعودی برحسب T است و از صفر به ۱ - $\mu_n(\infty)h(\infty)$ تغییر می‌کند.

از لم ۱.۳، رابطه‌های (۶) و (۷) نتیجه می‌شود که $T_1^* = g^{-1}(c)$ که در آن $g^{-1}(\cdot)$ معکوس تابع $g(\cdot)$ فرض شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در این حالت T_1^* جواب یکتا برای معادله (۶) است. از طرفی تغییر علامت از مثبت به منفی است پس T_1^* نقطه ماکزیمم کننده تابع دسترس‌پذیری است.

باتوجه به عبارت (۶) و لم ۱.۳، نتیجه زیر را درباره سیاست بهینه برای زمان جایگذاری سیستم موازی داریم.

نتیجه ۱.۳. فرض کنید $g(T)$ به صورت (۷) داده شده است، در اینصورت:

(الف) اگر $\frac{\mu_F}{\mu_F - \mu_P} h(\infty) > \mu_n(\infty)$ باشد، آنگاه یک T_1^* متناهی و منحصر بفرد وجود دارد که در رابطه (۶) صدق کند.

(ب) اگر $\frac{\mu_F}{\mu_F - \mu_P} h(\infty) \leq \mu_n(\infty)$ باشد، آنگاه $T_1^* = \infty$ است، یعنی نباید جایگذاری پیشگیرانه انجام دهیم.

بدیهی است که T_1^* در صورت وجود، به توزیع طول عمر مؤلفه‌ها وابسته است. در ادامه فرض می‌کنیم توزیع طول عمر مؤلفه‌ها $W(1, \beta)$ ($\beta \geq 1$) باشد، آنگاه تابع دسترس‌پذیری با استفاده از رابطه (۴) به صورت

$$AV(T) = \frac{\int_0^T (1 - (1 - e^{-u^\beta})^n) du}{\int_0^T (1 - (1 - e^{-u^\beta})^n) du + \mu_P + (\mu_F - \mu_P)(1 - e^{-T^\beta})^n}, \quad (8)$$

به دست می‌آید.

واضح است زمانی که $\beta = 1$ است، اگر $\sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \leq \frac{\mu_P}{\mu_F - \mu_P}$ آنگاه طبق قسمت ب نتیجه ۱.۳، $T_1^* = \infty$ است. بنابراین با توجه به رابطه (۶) و با فرض اینکه $\frac{\mu_F}{\mu_F - \mu_P} h(\infty) > \mu_n(\infty)$ باشد، یک T_1^* متناهی و منحصر به فرد که $AV(T)$ را ماکزیمم می‌کند، از رابطه زیر حاصل می‌شود

$$\frac{n\beta T^{\beta-1} e^{-T^\beta} (1 - e^{-T^\beta})^{n-1}}{1 - (1 - e^{-T^\beta})^n} \int_0^T (1 - (1 - e^{-u^\beta})^n) du - (1 - e^{-T^\beta})^n = \frac{\mu_P}{\mu_F - \mu_P}. \quad (9)$$

معادله (۹) بر حسب T غیرخطی است و برای به دست آوردن T_1^* نیاز به استفاده از محاسبات عددی داریم. در جدول ۱ مقادیر عددی T_1^* به ازای مقادیر مختلف $\frac{\mu_P}{\mu_F - \mu_P}$ و β های مختلف گزارش شده است.

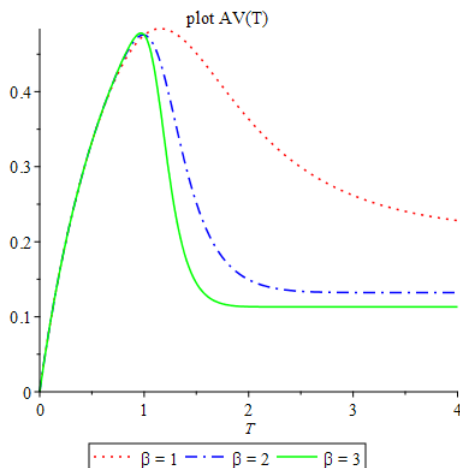
جدول ۱. مقادیر T_1^* به ازای مقادیر مختلف $\frac{\mu_P}{\mu_F - \mu_P}$ وقتی مؤلفه‌ها دارای توزیع $W(1, \beta)$ و $n = 10$ است.

$\beta = 3$	$\beta = 2$	$\beta = 1$			
T_1^*	T_1^*	T_1^*	$\frac{\mu_P}{\mu_F - \mu_P}$	μ_F	μ_P
۰/۹۷	۰/۹۹	۱/۱۵	۰/۱	۱۱	۱
۱/۰۰	۱/۰۶	۱/۳۶	۰/۲	۶	۱
۱/۱۵	۱/۳۰	۲/۴۲	۱	۲	۱
۱/۲۱	۱/۴۸	∞	۲	۳	۲
۱/۳۹	۱/۹۶	∞	۵	۶	۵
۱/۶۶	۳/۳۱	∞	۱۰	۱۱	۱۰

از جدول ۱ ملاحظه می‌شود مقدار T_1^* با افزایش β ، کاهش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود با افزایش $\frac{\mu_P}{\mu_F - \mu_P}$ مقدار T_1^* افزایش می‌یابد. با کاهش μ_F ($\mu_P = 1$) مقدار T_1^* افزایش می‌یابد و بعلاوه با افزایش μ_P زمانی که μ_F ثابت باشد، مقدار T_1^* افزایش می‌یابد. بنابراین با افزایش μ_F جایگذاری پیشگیرانه باید زودتر انجام شود و با افزایش μ_P جایگذاری پیشگیرانه می‌بایست دیرتر انجام شود. همچنین با تغییر β به‌طور واضح اثر پارامتر توزیع

طول عمر مؤلفه‌ها بر زمان جایگذاری بهینه سیستم مشاهده می‌شود. در واقع زمانی که $\frac{\mu_F}{\mu_F - \mu_P} = 2, 5, 10$ است، اگر توزیع طول عمر مؤلفه‌ها نمایی باشد، نباید جایگذاری پیشگیرانه انجام شود، درحالی‌که اگر توزیع طول عمر مؤلفه‌ها $W(1, \beta)$ ($\beta = 2, 3$) باشد، جایگذاری پیشگیرانه باید انجام شود. بعلاوه با افزایش نرخ خطر مؤلفه‌ها مقدار T_* کاهش می‌یابد.

در شکل ۱، نمودار تابع دسترس‌پذیری به دست آمده در رابطه (۸) برحسب T زمانی که $n = 10$ ، $\mu_P = 1$ و $\mu_F = 11$ باشد، به ازای β های مختلف رسم شده است.



شکل ۱: نمودار تابع $AV(T)$ زمانی که $n = 10$ ، $\mu_P = 1$ ، $\mu_F = 11$ و توزیع طول عمر مؤلفه‌ها $W(1, \beta)$ باشد.

از شکل ۱، مشاهده می‌شود که مقدار ماکزیمم تابع $AV(T)$ وجود دارد و مقدار دقیق آن در جدول ۱ آمده است.

۴ زمان تعویض بهینه در سیستم‌های موازی با تعداد مؤلفه‌های تصادفی با استفاده از تابع دسترس‌پذیری

در این بخش فرض کنید یک سیستم موازی با تعداد تصادفی از مؤلفه‌ها در اختیار داریم، با فرض این‌که X_i نشان‌دهنده طول عمر مؤلفه i ام ($i \geq 1$) باشد، طول عمر سیستم برابر با $T_N = \max\{X_1, \dots, X_N\}$ است، که در آن N تعداد مؤلفه‌ها در سیستم، یک متغیر تصادفی صحیح و مستقل از X_i ها می‌باشد. همچنین فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_N متغیرهای تصادفی طول عمر مؤلفه‌ها، مستقل از هم با تابع توزیع مشترک $F(t)$ هستند. اگر سیستم در زمان ثابت T ($T > 0$) یا در زمان خرابی هر کدام که زودتر اتفاق بیفتد، جایگذاری شود آنگاه زمان جایگذاری سیستم (طول عمر سیستم با سیاست معرفی شده) برابر با $T_S = \min\{T_N, T\}$ است. با در نظر گرفتن این مفروضات، تابع قابلیت اعتماد T_S ، به ازای $u < T$ ، به صورت

$$\bar{F}_{T_S}(u) = 1 - g_N(F(u)), \quad (10)$$

است، که در آن $g_N(s) = E(s^N)$ تابع مولد احتمال متغیر تصادفی N است. خانواده سری توانی می‌تواند توزیع مناسب برای متغیر تصادفی N باشد که شامل تعداد زیادی از توزیع‌های معروف

از جمله هندسی، پواسن بریده شده در صفر، لگاریتمی، دوجمله‌ای بریده شده در صفر و دوجمله‌ای منفی است. برای جزئیات بیشتر درباره توزیع‌های سری‌های توانی به [۵] رجوع کنید. تابع جرم احتمال آن به صورت

$$P\{N = n\} = \frac{a_n \theta^n}{b(\theta)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \theta > 0, \quad (11)$$

است، به طوری که $a_n > 0$ و تنها به n بستگی دارد و $b(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta^n$ متناهی است. از (۱۰) و (۱۱) تابع قابلیت اعتماد T_S ، به ازای $u < T$ ، به صورت

$$\bar{F}_{T_S}(u) = 1 - \frac{b(\theta F(u))}{b(\theta)},$$

قابل محاسبه است. در نتیجه میانگین زمان تا از کار افتادگی سیستم برابر است با

$$MTTF = \mu_{\theta}(T) = \int_0^T \bar{F}_{T_S}(u) du. \quad (12)$$

فرض کنید میانگین زمان برای جایگذاری سیستم با یک سیستم جدید در حالت جایگذاری برنامه‌ریزی نشده برابر μ_F و این زمان برای جایگذاری پیشگیرانه برابر با μ_P باشد ($\mu_P < \mu_F$)، در این صورت میانگین زمان برای جایگذاری سیستم برابر با

$$MTTR = \mu_P \bar{F}_{T_S}(T) + \mu_F (1 - \bar{F}_{T_S}(T)), \quad (13)$$

است. با قرار دادن (۱۲) و (۱۳) در (۱)، تابع دسترس پذیری به صورت تابعی از T قابل نوشتن است، یعنی

$$AV(T) = \frac{Tb(\theta) - \int_0^T b(\theta F(u)) du}{Tb(\theta) - \int_0^T b(\theta F(u)) du + b(\theta)\mu_P + (\mu_F - \mu_P)b(\theta F(T))}. \quad (14)$$

هدف به دست آوردن زمان جایگذاری بهینه براساس تابع دسترس پذیری است. مقدار بهینه این تابع با T^* نشان داده می‌شود که نقطه ماکزیمم کننده تابع دسترس پذیری است. چون تابع دسترس پذیری نسبت به T مشتق پذیر است، مشابه بخش قبل می‌توانیم از روش مشتق گیری استفاده کنیم. مشتق تابع $AV(T)$ نسبت به T برابر است با

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} AV(T) &= \frac{(\mu_F - \mu_P)[\theta f(T)b'(\theta F(T))][\int_0^T b(\theta F(u)) du - Tb(\theta)] - b'(\theta F(T))}{(Tb(\theta) - \int_0^T b(\theta F(u)) du + b(\theta)\mu_P + (\mu_F - \mu_P)b(\theta F(T)))^2} \\ &+ \frac{(\mu_F - \mu_P)b(\theta)b(\theta F(T)) + b(\theta)\mu_P(b(\theta) - b(\theta F(T)))}{(Tb(\theta) - \int_0^T b(\theta F(u)) du + b(\theta)\mu_P + (\mu_F - \mu_P)b(\theta F(T)))^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

بنابراین زمان جایگذاری بهینه، در صورت وجود، در معادله $\frac{d}{dT} AV(T) = 0$ صدق می‌کند. در این صورت از (۱۵) و برابر با صفر قرار دادن آن، عبارت زیر حاصل می‌شود

$$\frac{\theta f(T)b'(\theta F(T))[Tb(\theta) - \int_0^T b(\theta F(u)) du] - b(\theta)b(\theta F(T)) + b'(\theta F(T))}{b(\theta)(b(\theta) - b(\theta F(T)))} = \frac{\mu_P}{\mu_F - \mu_P}. \quad (16)$$

سمت راست رابطه بالا عددی مثبت و به T بستگی ندارد. فرض کنید سمت چپ رابطه (۱۶) برابر با $q(T)$ باشد، واضح است که علامت $\frac{d}{dT} AV(T)$ به علامت عبارت $\frac{\mu_P}{\mu_F - \mu_P} - q(T)$ بستگی دارد. بنابراین وقتی که

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} q(T) < \frac{\mu_P}{\mu_F - \mu_P} < \lim_{T \rightarrow \infty} q(T),$$

است، اگر $q(T)$ برحسب T اکیداً صعودی باشد، آنگاه یک T^* متناهی و منحصر به فرد وجود دارد به طوری که در رابطه (۱۶) صدق کند و تابع دسترس پذیری را ماکزیمم نماید. واضح است در صورت وجود T^* ، مقدار آن به $b(\theta)$ بستگی دارد. در ادامه فرض کنیم $b(\theta) = e^\theta - 1$ در نتیجه تابع جرم احتمال (۱۱) به

$$P\{N = n\} = \frac{\theta^n}{n!(e^\theta - 1)}, \quad n = 1, 2, \dots, \theta > 0,$$

تبدیل می شود که به تابع جرم احتمال توزیع پواسن بریده شده در صفر معروف است و در ادامه با نماد $P(0, \theta)$ نشان می دهیم. توزیع طول عمر مؤلفه ها را $W(1, \beta)$ ($\beta \geq 1$) در نظر بگیرید، در این صورت تابع دسترس پذیری از رابطه (۱۴) به صورت

$$AV(T) = \frac{\int_0^T (1 - \exp(-\theta e^{-u^\beta})) du}{\int_0^T (1 - \exp(-\theta e^{-u^\beta})) du + \mu_P + (\mu_F - \mu_P) \exp(-\theta e^{-T^\beta})}, \quad (17)$$

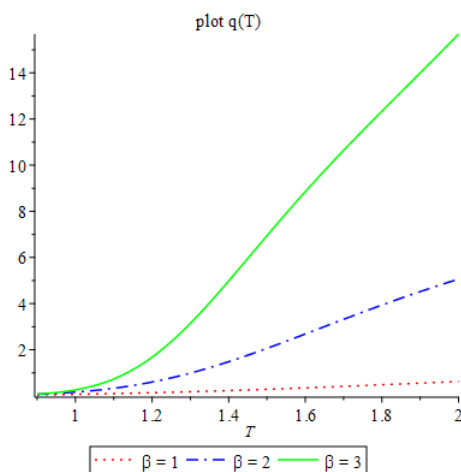
به دست می آید و با مشتق گرفتن از رابطه فوق نسبت به T و برابر با صفر قرار دادن آن، رابطه زیر حاصل می شود

$$\frac{\theta \beta T^{\beta-1} \exp(-T^\beta - \theta e^{-T^\beta})}{1 - \exp(-\theta e^{-T^\beta})} \int_0^T (1 - \exp(-\theta e^{-u^\beta})) du - \exp(-\theta e^{-T^\beta}) = \frac{\mu_P}{\mu_F - \mu_P}. \quad (18)$$

سمت چپ رابطه (۱۸) را برابر با $\varphi(T)$ در نظر بگیرید. در شکل ۲ نمودار تابع $\varphi(T)$ برحسب T زمانی که $\theta = 10$ و $\beta = 1, 2, 3$ باشد، رسم شده است. مشاهده می شود که $\varphi(T)$ برحسب T اکیداً صعودی است، پس وقتی

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} \varphi(T) < \frac{\mu_P}{\mu_F - \mu_P} < \lim_{T \rightarrow \infty} \varphi(T),$$

باشد، یک T^* متناهی و منحصر به فرد که $AV(T)$ را ماکزیمم می کند، وجود دارد و از رابطه (۱۸) به دست می آید. معادله (۱۸) برحسب T غیرخطی است و برای به دست آوردن T^* نیاز به استفاده از محاسبات عددی داریم. در جدول ۲ مقادیر عددی T^* به ازای مقادیر مختلف $\frac{\mu_P}{\mu_F - \mu_P}$ و β های مختلف گزارش شده است.



شکل ۲: نمودار تابع $\varphi(T)$ زمانی که N دارای توزیع $P(0, 10)$ و توزیع طول عمر مؤلفه ها $W(1, \beta)$ باشد.

جدول ۲. مقادیر T_{γ}^* وقتی N دارای توزیع $P(0, 10)$ و مؤلفه‌ها دارای توزیع $W(1, \beta)$ است.

$\beta = 3$	$\beta = 2$	$\beta = 1$			
T_{γ}^*	T_{γ}^*	T_{γ}^*	$\frac{\mu_P}{\mu_F - \mu_P}$	μ_F	μ_P
۰/۸۷	۰/۹۴	۱/۱۰	۰/۱	۱۱	۱
۰/۹۴	۱/۰۳	۱/۳۴	۰/۲	۶	۱
۱/۰۳	۱/۱۷	۱/۸۳	۰/۵	۳	۱
۱/۰۹	۱/۳۰	۲/۵۳	۱	۲	۱
۱/۱۸	۱/۴۹	∞	۲	۳	۲
۱/۳۰	۱/۹۹	∞	۵	۶	۵

از جدول ۲ ملاحظه می‌شود که مقدار T_{γ}^* با افزایش β ، کاهش می‌یابد که این نتیجه با مشاهده شکل ۲ نیز واضح است. همچنین مشاهده می‌شود با افزایش $\frac{\mu_P}{\mu_F - \mu_P}$ مقدار T_{γ}^* افزایش می‌یابد. با کاهش μ_F ($\mu_P = 1$) مقدار T_{γ}^* افزایش می‌یابد و بعلاوه با افزایش μ_P زمانی که μ_F ثابت باشد، مقدار T_{γ}^* افزایش می‌یابد. بنابراین با افزایش μ_F جایگذاری پیشگیرانه باید زودتر انجام شود و با افزایش μ_P جایگذاری پیشگیرانه می‌بایست دیرتر انجام شود. همچنین با تغییر β به‌طور واضح اثر پارامتر توزیع طول عمر مؤلفه‌ها بر زمان جایگذاری بهینه سیستم مشاهده می‌شود. در واقع زمانی که $\frac{\mu_P}{\mu_F - \mu_P} = 2,5$ است، اگر توزیع طول عمر مؤلفه‌ها نمایی باشد، نباید جایگذاری پیشگیرانه انجام شود، درحالی‌که اگر توزیع طول عمر مؤلفه‌ها $W(1, \beta)$ ($\beta = 2, 3$) باشد، جایگذاری پیشگیرانه باید انجام شود. واضح است وقتی که $\beta = 1$ است، اگر

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \varphi(T) = \ln(10) - (1 - \gamma) = 1,88 \leq \frac{\mu_P}{\mu_F - \mu_P},$$

باشد که در آن $\gamma = 0,577\dots$ ثابت اویلر است، آنگاه $T_{\gamma}^* = \infty$ است.

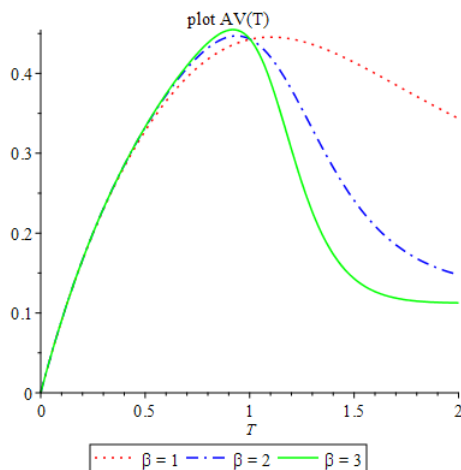
با توجه به جدول‌های ۱ و ۲ مشاهده می‌شود که تفاوت بین T_1^* و T_3^* بسیار کوچک است. همچنین از دو جدول برای $\beta = 3$ ملاحظه می‌شود هنگامی که تعداد مؤلفه‌های سیستم تصادفی است نسبت به زمانی که تعداد مؤلفه‌ها ثابت است، جایگذاری پیشگیرانه باید زودتر انجام شود.

در شکل ۳، نمودار تابع دسترس‌پذیری به‌دست آمده در رابطه (۱۷) برحسب T زمانی که $\theta = 10$ ، $\mu_P = 1$ و $\mu_F = 11$ باشد، به‌ازای β ‌های مختلف رسم شده است.

با توجه به شکل ۳، مشاهده می‌شود که مقدار ماکزیمم تابع $AV(T)$ وجود دارد و مقدار دقیق آن در جدول ۲ آمده است.

۵ جمع‌بندی

در این مقاله، مطالعه مسئله بهینه‌سازی بر مبنای ساختار یک سیستم موازی با تعداد مؤلفه‌های ثابت و تصادفی انجام شد. برای حالتی که تعداد مؤلفه‌ها ثابت و توزیع طول عمر مؤلفه‌ها $W(1, \beta)$ ($\beta \geq 1$) باشد، زمان جایگذاری بهینه سیستم به صورت نظری و عددی تعیین شده است. همچنین زمان جایگذاری بهینه سیستم وقتی توزیع طول عمر مؤلفه‌ها $W(1, \beta)$ ($\beta \geq 1$) و تعداد مؤلفه‌ها دارای توزیع پواسن بریده‌شده در صفر است، تحت شرایط بهینه‌سازی بر مبنای تابع دسترس‌پذیری به صورت تحلیلی و عددی به‌دست آمده است. بعلاوه تأثیر پارامتر توزیع طول عمر مؤلفه‌ها بر زمان جایگذاری بهینه سیستم بررسی و نتایج ارائه گردید.



شکل ۳: نمودار $AV(T)$ زمانی که N دارای توزیع $P(0, 10)$ ، $\mu_P = 1$ ، $\mu_F = 11$ و توزیع طول عمر مؤلفه‌ها $W(1, \beta)$ باشد.

به عنوان آینده تحقیق زمان جایگذاری بهینه سیستم وقتی که مؤلفه‌های سیستم وابسته و تعداد مؤلفه‌ها تصادفی و توزیع آن‌ها متعلق به کلاس سری‌های توانی از توزیع‌ها است، می‌تواند مورد مطالعه و بررسی قرار گیرد. همچنین هدف مسئله مورد مطالعه می‌تواند بهینه‌سازی براساس انواع دیگر تابع دسترس‌پذیری و مقایسه آن‌ها با یکدیگر باشد.

مراجع

- [۱] م. اسدی، آشنایی با نظریه قابلیت اعتماد، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۹۲.
- [۲] ف. صفائی و ج. احمدی، مقایسه زمان جایگذاری بهینه در سیستم‌های قابل تعمیر براساس توابع نرخ خرابی و احتمال تعمیر مینیمال، مجله علوم آماری ایران، ۱۳۹۴.
- [3] Eryilmaz, S. (2017), *A note on optimization problems of a parallel system with a random number of units*, Int. J. of Reliab. Qual. and Safety Eng. 24, 1-9.
- [4] Eryilmaz, S. (2020), *On optimal age replacement policy for a class of coherent systems*, Computational and Applied Mathematics, 1-7.
- [5] Johnson, N. L., Kemp, A. W. and Kotz, S. (2005), *Univariate Discrete Distributions*, third ed. Wiley, New York.
- [6] Nakagawa, T., and Zhao, X. (2012), *Optimization problems of a parallel system with a random number of units*, IEEE Transactions Reliability 61, 543-548.
- [7] Sherwin, D. J., and Bossche, A. (2012) *The Reliability, Availability and Productiveness of Systems*. Springer Science & Business Media.



بررسی مدل تنش-مقاومت یک سیستم موازی با فرض وابستگی در مدل نرخ خطر معکوس متناسب

قنبری، س^۱ ، رضایی رکن آبادی، ع^۲ و صالحی، م^۳

^{۱،۲} گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

^۳ گروه آمار و ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه نیشابور

چکیده

در تحلیل قابلیت اعتماد مدل‌های تنش-مقاومت، متغیرهای تنش و مقاومت معمولاً مستقل فرض می‌شوند. با این حال، چنین فرضی ممکن است در برخی کاربردها غیر واقعی باشد. در این مقاله، قابلیت اعتماد تنش-مقاومت یک سیستم موازی را در مدل نرخ خطر معکوس متناسب با فرض وابستگی تحت دو مفصل فایرلی-گامبل-مورگنسترن و گامبل-هوگارد محاسبه می‌شود و همچنین اثبات می‌شود تحت این دو مفصل، پارامتر مدل تنش-مقاومت به توزیع پایه وابسته نیست. بنابراین، برای سادگی در انجام محاسبات از توزیع پایه نمایی استفاده می‌شود. در ادامه، روش درست‌نمایی ماکسیمم دو مرحله‌ای برای برآورد پارامترها به کار برده می‌شود و برای ارزیابی عملکرد برآوردگرهای درست‌نمایی ماکسیمم تحت دو مفصل ذکر شده، شبیه‌سازی مونت کارلو انجام می‌شود.

کلمات کلیدی: تنش، مقاومت، مدل نرخ خطر معکوس متناسب، مفصل فایرلی-گامبل-مورگنسترن، مفصل گامبل-هوگارد

^۱ saraghanbari5@gmail.com

^۲ rezaei@um.ac.ir

^۳ salehi2sms@gmail.com

۱ پیش‌گفتار

مدل تنش-مقاومت یکی از پرکاربردترین و ضروری‌ترین مدل‌های قابلیت اعتماد است. این مفهوم توسط بیرنام^۱ و مک‌کارتی^۲ [۲] معرفی شد و در سال ۲۰۰۳ توسط کاتز^۳ و همکاران [۳] توسعه یافت. در این مدل، اگر فشار تحمیل شده بر روی مولفه (یا سیستم) بیشتر از مقاومت مولفه (یا سیستم) باشد، مولفه (یا سیستم) از کار می‌افتد. بنابراین، قابلیت اعتماد سیستم احتمالی است که مقاومت سیستم از تنش وارد شده بر آن بیشتر باشد، یعنی $R = P(Y > X)$. کاربردهای زیادی از مدل‌های تنش-مقاومت در مهندسی و پزشکی وجود دارد. نمونه‌هایی از کاربرد این مدل را می‌توان در مطالعات جانسون^۴ [۴] و قنبری و همکاران [۵] یافت.

در صنعت، در اکثر اوقات، بین متغیرهای مدل وابستگی وجود دارد. به عنوان مثال، اگر درآمد و مصرف خانوار به ترتیب به عنوان متغیر مقاومت Y و متغیر تنش X در نظر گرفته شود، آن‌گاه $R = P(Y > X)$ احتمال مقرون به صرفه بودن مالی خانواده است و R نشان دهنده اندازه‌گیری شکنندگی مالی خانواده است. بنابراین برای نزدیک‌تر شدن مدل‌بندی آماری به واقعیت، بهتر است فرض وابستگی را در نظر بگیریم. در این راستا یکی از تلاش‌های معنی‌دار استفاده از توزیع‌های دو متغیره برای توصیف رابطه وابستگی بین تنش و مقاومت است، مانند توزیع گامای دو متغیره، توزیع دو متغیره مارشال-اولکین و غیره. با این وجود، یک مدل توزیع دو متغیره نیاز به توزیع حاشیه‌ای دارد. بنابراین، این روش فقط می‌تواند در برخی موارد خاص اعمال شود. برای غلبه بر این محدودیت، رویکرد مبتنی بر مفصل که می‌پذیرد توزیع حاشیه‌ها از هر نوع باشند و لزوماً متعلق به یک خانواده نباشند، توسط برخی از محققان مورد توجه قرار گرفت. دوما^۵ و جوردانو^۶ [۶] از مفصل فایرلی-گامبل-مورگنسترن (FGM) برای تجزیه و تحلیل وابستگی در مدل‌های تنش-مقاومت استفاده کردند و مفصل FGM را تعمیم دادند. گائو^۷ و همکاران [۷] یک مدل تنش-مقاومت وابسته را که براساس تابع مفصل ترکیب خطی از کلاتون^۸، فرانک^۹ و گامبل^{۱۰} ساخته شده است، تجزیه و تحلیل کردند. به طور کلی مشخص نیست که کدام تابع مفصل باید استفاده شود. اگرچه می‌توان مدل مفصل را با استفاده از معیارهای اطلاعات آکائیک یا بیزی انتخاب کرد.

در این مقاله دو مفصل مهم که عبارت است از: مفصل فایرلی-گامبل-مورگنسترن (FGM) و گامبل-هوگارد (GH) را در نظر می‌گیریم. مفصل‌ها شامل یک پارامتر θ به نام پارامتر وابستگی هستند. اولین مفصل، مفصل FGM با پارامتر وابستگی $\theta \in [-1, 1]$ که وابستگی مثبت و منفی را اندازه‌گیری می‌کند، انتخاب می‌کنیم و نوع دیگر از مفصل، مفصل GH با $\theta \in [1, +\infty)$ در نظر می‌گیریم. این مفصل فقط وابستگی مثبت را نشان می‌دهد. همچنین فرض می‌کنیم که توزیع متغیرهای تنش و مقاومت از مدل نرخ خطر معکوس متناسب (PRHR) پیروی کنند، به این دلیل که در این حالت مقدار قابلیت اعتماد سیستم موازی تحت مفصل‌های FGM و GH مستقل از توزیع پایه، اثبات می‌شود.

ادامه مطالب به شرح زیر است. در بخش ۲، مدل مورد بررسی و مفصل‌های استفاده شده به طور کامل تشریح

^۱ Birnbaum

^۲ McCarty

^۳ Kotz

^۴ Johnson

^۵ Domma

^۶ Giordano

^۷ Gao

^۸ Clayton

^۹ Frank

^{۱۰} Gumbel

می‌شوند، همچنین مقدار پارامتر \mathcal{R} برای هر دو مفصل ذکر شده براساس مدل PRHR محاسبه می‌شود. در بخش ۳، رفتار پارامتر \mathcal{R} را نسبت به پارامتر وابستگی θ در مدل PRHR تحت دو مفصل FGM و GH مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین در بخش ۴، برآورد نقطه‌ای برای پارامتر \mathcal{R} در مدل PRHR تحت دو مفصل FGM و GH به روش درستمایی ماکسیمم دو مرحله‌ای بدست می‌آوریم و در بخش ۵، با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو، رفتار برآوردگرهای پارامتر \mathcal{R} در مدل PRHR تحت دو مفصل FGM و GH مورد بررسی و تحلیل قرار می‌دهیم. در آخر نیز خلاصه‌ای از نتایج بدست آمده را ارائه می‌دهیم. شایان ذکر است این مقاله بخشی از فصل ۴ رساله قنبری [۱] است که علاقمندان می‌توانند برای مشاهده نتایج و تفاسیر بیشتر در خصوص این مدل به این رساله مراجعه کنند.

۲ قابلیت اعتماد تنش-مقاومت یک سیستم موازی در مدل PRHR تحت وابستگی

در یک سیستم موازی با n مولفه، فرض کنید X فشار مشترک تحمیل شده بر روی یکایک مولفه‌ها با تابع توزیع تجمعی $F_X(x)$ و تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ و Y_i مقاومت مولفه i ام با تابع توزیع تجمعی $G_Y(y)$ و تابع چگالی احتمال $g_Y(y)$ باشند. همچنین فرض کنید، متغیر تصادفی X با تابع مفصل $C(\cdot, \cdot)$ با متغیر تصادفی $Y_{n:n}$ وابسته باشد. در اینصورت، مقدار \mathcal{R} به صورت زیر

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= P(Y_{n:n} > X) \\ &= \int_0^{+\infty} P(X < Y_{n:n} | Y_{n:n} = y^*) dG_{Y_{n:n}}(y^*) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{y^*} h(x, y^*) dx dy^* \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{y^*} c(f_X(x), g_{Y_{n:n}}(y^*)) f_X(x) g_{Y_{n:n}}(y^*) dx dy^* \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \Big|_{u=F_X(y^*), v=G_{Y_{n:n}}(y^*)} g_{Y_{n:n}}(y^*) dy^*. \end{aligned} \quad (1)$$

محاسبه می‌شود. که در آن $h(x, y^*)$ تابع چگالی احتمال توأم X و $Y_{n:n}$ است. همچنین در ادامه فرض شده است که متغیرهای تصادفی X و Y_i به ترتیب، از مدل PRHR به صورت زیر پیروی کنند.

$$F_X(x) = H^\lambda(x); \quad x \in S, \lambda > 0, \quad G_Y(y) = H^\beta(y); \quad y \in S, \beta > 0, \quad (2)$$

که در آن $H(x)$ تابع توزیع پایه و مستقل از λ و β بوده و S دامنه تغییرات تابع توزیع پایه $H(x)$ است. در ادامه می‌خواهیم براساس دو مفصل FGM و GH مقدار \mathcal{R} را محاسبه کنیم.

۱.۲ مفصل FGM

مفصل فایرلی-گامبل-مورگنسترن که در اصل توسط مورگنسترن معرفی شد، کاربردهای گسترده‌ای دارد زیرا کار با فرم آن آسان است. این مفصل به اختصار با نماد FGM نمایش داده می‌شود. برای اطلاعات بیشتر در مورد این مفصل به نلسن [۸] و منابع ذکر شده آن می‌توان مراجعه کرد. تابع مفصل FGM یک پارامتری با $1 \leq \theta \leq -1$ برابر

است با:

$$C(F_X(x), G_{Y_{n:n}}(y)) = F_X(x)G_{Y_{n:n}}(y)[1 + \theta(1 - F_X(x))(1 - G_{Y_{n:n}}(y))], \quad -1 \leq \theta \leq 1. \quad (3)$$

در ادامه فرض شده است، $U = F_X(x) = H^\lambda(x)$ و $V = G_{Y_{n:n}}(y) = H^{n\beta}(y)$ ، در قضیه ۱.۲ می‌خواهیم ثابت کنیم در یک سیستم موازی مقدار پارامتر \mathcal{R} تحت مفصل FGM به توزیع پایه مدل PRHR وابسته نیست.

قضیه ۱.۲. در یک سیستم موازی با n مولفه، فرض کنید X تنش مشترک تحمیل شده بر روی یکایک مولفه‌ها با مقاومت Y_i باشد. همچنین اگر متغیرهای تصادفی X و $Y_{n:n}$ تحت مفصل FGM بهم وابسته باشند. آنگاه مقدار \mathcal{R} تحت این مفصل مستقل از توزیع پایه و برابر است با:

$$\mathcal{R} = \frac{n\beta(1 + 2\theta)}{\lambda + n\beta} - \frac{2\theta n\beta}{\lambda + 2n\beta} - \frac{n\beta\theta}{2\lambda + n\beta}, \quad (4)$$

برهان. برای اثبات این قضیه، با استفاده از تعریف مفصل FGM که در (۳) بیان شده است، مقدار $\frac{\partial C_\theta(u,v)}{\partial v}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\partial C_\theta(u,v)}{\partial v} = u[1 + \theta(1 - u)(1 - 2v)]. \quad (5)$$

با توجه به (۱)، \mathcal{R} به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \int_0^\infty H^\lambda(y^*) \left(1 + \theta(1 - H^\lambda(y^*))(1 - 2H^{n\beta}(y^*)) \right) n\beta H^{n\beta-1}(y^*) h.(y^*) dy^* \\ &= \int_0^\infty \left(n\beta h.(y^*) H^{n\beta+\lambda-1}(y^*) + n\beta\theta h.(y^*) H^{n\beta+\lambda-1}(y^*) - 2\theta n\beta h.(y^*) \right. \\ &\quad \left. \times H^{2n\beta+\lambda-1}(y^*) - \theta n\beta h.(y^*) H^{n\beta+2\lambda-1}(y^*) + 2\theta n\beta h.(y^*) H^{2n\beta+2\lambda-1}(y^*) \right) dy^* \\ &= \left(\frac{n\beta H^{n\beta+\lambda}(y^*)}{\lambda + n\beta} + \frac{n\beta\theta H^{n\beta+\lambda}(y^*)}{\lambda + n\beta} - \frac{2\theta n\beta H^{2n\beta+\lambda}(y^*)}{\lambda + 2n\beta} - \frac{\theta n\beta H^{n\beta+2\lambda}(y^*)}{2\lambda + n\beta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2n\beta H^{2n\beta+2\lambda}(y^*)}{2\lambda + 2n\beta} \right) \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{n\beta}{\lambda + n\beta} + \frac{n\beta\theta}{\lambda + n\beta} - \frac{2\theta n\beta}{\lambda + 2n\beta} - \frac{n\beta\theta}{2\lambda + n\beta} + \frac{2n\beta\theta}{2\lambda + 2n\beta} \\ &= \frac{n\beta(1 + 2\theta)}{\lambda + n\beta} - \frac{2\theta n\beta}{\lambda + 2n\beta} - \frac{n\beta\theta}{2\lambda + n\beta}. \end{aligned} \quad (6)$$

از (۶) مشاهده می‌کنید، مقدار \mathcal{R} تنها به پارامترهای λ ، β ، n و θ وابسته و مستقل از توزیع پایه $H.(.)$ است.

□

۲.۲ مفصل GH

مفصل گامبل-هوگارد، توسط گامبل و هوگارد معرفی شد. این مفصل را با نماد GH نمایش داده می‌شود. همچنین برای جزئیات بیشتر در مورد این مفصل به نلسن [۸] مراجعه شود. این مفصل برای $1 \leq \theta \leq \infty$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C_\theta(F_X(x), G_{Y_{n:n}}(y)) = \text{Exp} \left(- \left((-\ln(F_X(x)))^\theta + (-\ln(G_{Y_{n:n}}(y)))^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right), \quad 1 \leq \theta \leq \infty.$$

در ادامه فرض شده است $U = F_X(x) = H^\lambda(x)$ و $V = G_{Y_{n:n}}(y) = H^{n\beta}(y)$ در قضیه ۲.۲ می‌خواهیم در یک سیستم موازی ثابت کنیم مقدار پارامتر \mathcal{R} تحت مفصل GH به توزیع پایه مدل PRHR وابسته نیست.

قضیه ۲.۲. در یک سیستم موازی با n مولفه، فرض کنید X تنش مشترک تحمیل شده بر روی یکایک مولفه‌ها با مقاومت Y_i باشد. همچنین اگر متغیرهای تصادفی X و $Y_{n:n}$ تحت مفصل GH بهم وابسته باشند. آنگاه مقدار \mathcal{R} تحت این مفصل مستقل از توزیع پایه و برابر است با:

$$\mathcal{R} = \frac{(n\beta)^\theta}{\lambda^\theta + (n\beta)^\theta}. \quad (7)$$

برهان. $\frac{\partial C_\theta(u,v)}{\partial v}$ برای این مفصل به صورت

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_\theta(u,v)}{\partial v} &= \frac{(-\ln(v))^{\theta-1}}{v} \left[(-\ln(u))^\theta + (-\ln(v))^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}-1} \\ &\quad \times \text{Exp} \left(- \left((-\ln(u))^\theta + (-\ln(v))^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

بدست می‌آید. با توجه به (۱)، داریم

$$\mathcal{R} = P(Y_{n:n} > X) = \int_0^{+\infty} \frac{(n\beta)^\theta}{H.(y^*)} h.(y^*) (-\ln(H.(y^*)))^{\theta-1} A^{\frac{1}{\theta}-1} e^{-A^{\frac{1}{\theta}}} dy^* \quad (9)$$

که در آن $A = (\lambda^\theta + (n\beta)^\theta)(-\ln(H.(y^*)))^\theta$ است. با استفاده از روش تغییر متغیر و با فرض $u = (-\ln(H.(y^*)))^\theta$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= P(Y_{n:n} > X) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(n\beta)^\theta}{\theta} \left(u(\lambda^\theta + (n\beta)^\theta) \right)^{\frac{1}{\theta}-1} e^{-(u(\lambda^\theta + (n\beta)^\theta))^{\frac{1}{\theta}}} du \\ &= - \frac{(n\beta)^\theta}{\lambda^\theta + (n\beta)^\theta} e^{-((u(\lambda^\theta + (n\beta)^\theta))^{\frac{1}{\theta}})} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{(n\beta)^\theta}{\lambda^\theta + (n\beta)^\theta}. \end{aligned} \quad (10)$$

همان طور که از (۱۰) مشاهده می‌کنید، مقدار \mathcal{R} تنها به پارامترهای λ ، β ، n و θ وابسته و مستقل از توزیع پایه $H.(.)$ است. \square

نکته: لازم به ذکر است که مقدار پارامتر \mathcal{R} در یک سیستم موازی براساس فرض‌های بیان شده، برای مفصل‌های گامبل-نمایی، کلایتون، فرانک، جلی بیو قلو^{۱۱} - کوادراس^{۱۲} و علی-میخائیل-حق^{۱۳} مستقل از توزیع پایه نیست. به منظور دور نشدن از موضوع اصلی، از ذکر جزئیات آن صرف نظر می‌کنیم.

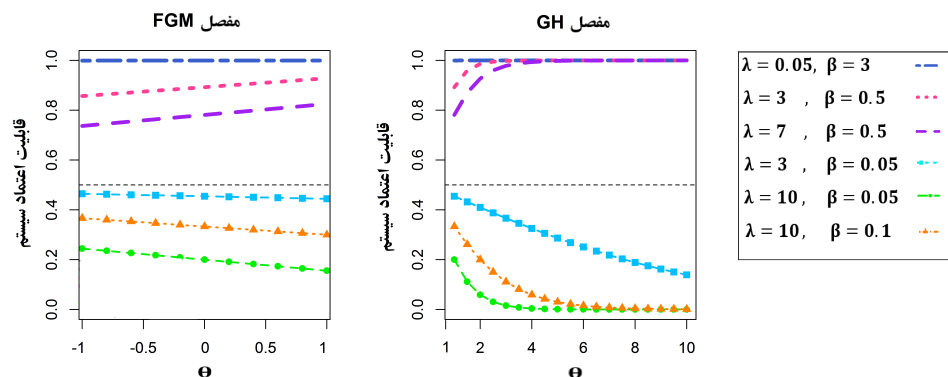
^{۱۱}Celebioglu

^{۱۲}Cuadras

^{۱۳}Ali-Mikhail-Haq

۳ رفتار قابلیت اعتماد تنش-مقاومت نسبت به پارامتر وابستگی یک سیستم موازی در مدل PRHR تحت مفصل‌های FGM و GH

به منظور بررسی تاثیر وابستگی بین متغیرهای X و $Y_{n:n}$ روی قابلیت اعتماد تنش-مقاومت، نمودار R نسبت به پارامتر وابستگی θ برای مقادیر مختلف پارامترهای $\lambda = 0.05, 3, 7, 10$ و $\beta = 0.05, 0.1, 0.5, 3$ با توجه به دو مفصل نام برده، رسم شده است. شکل ۱ رفتار R نسبت به پارامتر وابستگی θ تحت مفصل‌های FGM و GH را نشان می‌دهد.



شکل ۱: رفتار R نسبت به پارامتر وابستگی θ تحت مفصل‌های FGM و GH.

از شکل ۱ می‌توان نتایج زیر را گرفت:

◀ اگر $R > \frac{1}{3}$ باشد، آنگاه

- رفتار R نسبت به پارامتر وابستگی θ تحت مفصل‌های FGM و GH صعودی است.
- نمودار R نسبت به پارامتر وابستگی θ تحت مفصل FGM تقریباً به صورت خطی است.
- روند افزایشی R نسبت به پارامتر وابستگی θ تحت مفصل GH سریع‌تر نسبت به مفصل FGM است.

◀ اگر $R < \frac{1}{3}$ باشد، آنگاه

- رفتار R نسبت به پارامتر وابستگی θ ، تحت مفصل‌های FGM و GH نزولی است.
- نمودار R نسبت به پارامتر وابستگی θ ، تقریباً به صورت خطی تحت مفصل‌های FGM است.
- روند کاهشی R نسبت به پارامتر وابستگی θ تحت مفصل GH سریع‌تر نسبت به مفصل FGM است.

باتوجه به شکل ۱، می‌توان مشاهده کرد که روند تغییرات R نسبت به پارامتر وابستگی θ تحت مفصل GH نسبت به مفصل FGM سریع‌تر است.

۴ برآورد نقطه‌ای قابلیت اعتماد تنش-مقاومت یک سیستم موازی در مدل PRHR تحت وابستگی

به منظور برآورد پارامترهای β, λ, γ و θ از روش برآورد درستنمایی ماکسیمم دو مرحله‌ای استفاده می‌شود. برای جزئیات بیشتر در مورد این روش می‌توان به جو^{۱۴} [۱۰] مراجعه کرد. در ادامه به طور مختصر این روش را توضیح می‌دهیم.

الگوریتم ۱. (روش درستنمایی ماکسیمم دو مرحله‌ای)

فرض کنید $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ یک نمونه تصادفی از تابع توزیع توام $H(x, y)$ باشد.

- گام اول: پارامترهای β, λ, γ با توجه به تابع درستنمایی براساس تابع‌های چگالی حاشیه‌ای توزیع، برآورد می‌شوند.
- گام دوم: برآورد پارامترهای محاسبه شده در گام اول در رابطه زیر جایگزین می‌شوند.

$$L(\underline{x}|\underline{y}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|y_i).$$

- گام سوم: برآورد θ از حل معادله زیر بدست آورده می‌شود.

$$\frac{\partial \ln(L(\underline{x}|\underline{y}))}{\partial \theta} = 0.$$

- گام چهارم: در آخر با استفاده از خاصیت پایایی برآوردگر درستنمایی ماکسیمم، برآوردگرهای ML پارامتر \mathcal{R} در یک سیستم موازی در مدل PRHR بعد از جایگذاری $\hat{\beta}, \hat{\lambda}, \hat{\gamma}$ و $\hat{\theta}$ به جای β, λ, γ و θ در (۴) و (۷) به ترتیب تحت مفصل FGM و GH به صورت

$$\hat{\mathcal{R}} = \frac{n\hat{\beta}(1 + 2\hat{\theta})}{\hat{\lambda} + n\hat{\beta}} - \frac{2\hat{\theta}n\hat{\beta}}{\hat{\lambda} + 2n\hat{\beta}} - \frac{n\hat{\beta}\hat{\theta}}{2\hat{\lambda} + n\hat{\beta}}, \quad (11)$$

و

$$\hat{\mathcal{R}} = \frac{(n\hat{\beta})^{\hat{\theta}}}{\hat{\lambda}^{\hat{\theta}} + (n\hat{\beta})^{\hat{\theta}}}. \quad (12)$$

به دست می‌آیند.

لازم به ذکر است که تابع چگالی توام $h(x_i, y_i) = f(x_i|y_i)f_Y(y_i)$ و چون $f_Y(y_i)$ به مقدار θ وابسته نیست، برای محاسبه برآورد θ ، تابع $\prod_{i=1}^n f(x_i|y_i)$ ماکسیمم می‌شود.

۱.۴ مفصل FGM

باتوجه به الگوریتم روش درستنمایی ماکسیمم دو مرحله‌ای، ابتدا پارامترهای β, λ, γ براساس نمونه زوجی

$$\{(x_1, y_1^*), (x_2, y_2^*), \dots, (x_m, y_m^*)\}$$

^{۱۴}Joe

و توزیع‌های حاشیه‌ای داده شده از مدل PRHR تعریف شده در (۲) برای متغیرهای X و $Y_{n:n}$ برآورد می‌شوند. یادآور می‌شویم چون مقدار \mathcal{R} در مفصل‌های FGM و GH به توزیع پایه بستگی ندارد برای سهولت در محاسبات در اینجا از توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\gamma}$ به عنوان توزیع پایه استفاده نموده‌ایم.

$$\begin{aligned} L := L(\lambda, \beta, \gamma | (x_1, y_1^*), (x_2, y_2^*), \dots, (x_m, y_m^*)) &= \prod_{i=1}^m f_X(x_i) \times f_{Y_{n:n}}(y_i^*) \\ &= (\lambda\gamma)^m e^{-\gamma \sum_{i=1}^m x_i} \prod_{i=1}^m (1 - e^{-\gamma x_i})^{\lambda-1} \\ &\quad \times (n\beta\gamma)^m e^{-\gamma \sum_{i=1}^m y_i^*} \prod_{i=1}^m (1 - e^{-\gamma y_i^*})^{n\beta-1} \end{aligned} \quad (13)$$

اگر MLE پارامترهای λ و β را به ترتیب با نمادهای $\hat{\lambda}$ و $\hat{\beta}$ نمایش دهیم، براساس (۱۳)، به ترتیب $\hat{\lambda}$ و $\hat{\beta}$ برابر است با:

$$\hat{\lambda} = -\frac{m}{\sum_{i=1}^m \ln(1 - e^{-\gamma x_i})},$$

و

$$\hat{\beta} = -\frac{m}{n \sum_{i=1}^m \ln(1 - e^{-\gamma y_i^*})}.$$

همچنین $\hat{\gamma}$ MLE پارامتر γ براساس حل معادله غیرخطی

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \gamma} = \frac{2m}{\gamma} - \left(\sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=1}^m y_i^* \right) + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^m \frac{x_i e^{-\gamma x_i}}{1 - e^{-\gamma x_i}} + (n\beta - 1) \sum_{i=1}^m \frac{y_i^* e^{-\gamma y_i^*}}{1 - e^{-\gamma y_i^*}} = 0.$$

محاسبه می‌شود. در ادامه با توجه به الگوریتم ۱، مقدار $\hat{\theta}$ که MLE پارامتر θ براساس تابع چگالی شرطی X به شرط $Y_{n:n} = y^*$ تحت مفصل FGM محاسبه می‌شود. این تابع چگالی شرطی تحت مفصل FGM برابر است با:

$$f(x | Y_{n:n} = y^*) = \lambda\gamma e^{-\gamma x} (1 - e^{-\gamma x})^{\lambda-1} \left(1 + \theta (1 - e^{-\gamma x})^\lambda (2(1 - e^{-\gamma y^*})^{n\beta} - 1) \right), \quad (14)$$

و لگاریتم تابع درستنمایی شرطی x به شرط y^* به صورت

$$\begin{aligned} \ln(L(x|y^*)) &= m \ln(\lambda\gamma) - \gamma \sum_{i=1}^m x_i + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^m \ln(1 - e^{-\gamma x_i}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \ln(1 + \theta (1 - e^{-\gamma x_i})^\lambda (2(1 - e^{-\gamma y_i^*})^{n\beta} - 1)). \end{aligned}$$

است. مقادیر $(\hat{\lambda}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ جایگزین پارامترهای (λ, β, γ) می‌شوند و مقدار $\hat{\theta}$ براساس حل معادله غیرخطی

$$\frac{\partial \ln(L(x|y^*))}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^m \frac{(1 - e^{-\gamma x_i})^\lambda (2(1 - e^{-\gamma y_i^*})^{n\beta} - 1)}{\left[1 + \theta (1 - e^{-\gamma x_i})^\lambda (2(1 - e^{-\gamma y_i^*})^{n\beta} - 1) \right]} = 0. \quad (15)$$

محاسبه می‌شود. مقدار \hat{R} یک سیستم موازی در مدل PRHR تحت مفصل FGM با استفاده از خاصیت پایایی برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم و جایگذاری $\hat{\beta}$ ، $\hat{\lambda}$ ، $\hat{\gamma}$ و $\hat{\theta}$ به جای β ، λ ، γ و θ در (۱۱) به دست می‌آید.

باتوجه به اینکه مقادیر MLE پارامترهای λ ، β و γ تحت مفصل GH دقیقاً مانند زیربخش ۴,۱ تحت مفصل FGM است. بدین منظور از نوشتن دوباره روابط صرف نظر می‌کنیم و تنها MLE پارامتر θ براساس تابع چگالی شرطی X به شرط $Y_{n:n} = y^*$ تحت مفصل GH با استفاده از (λ) به صورت زیر بدست می‌آوریم.

$$f(x|Y_{n:n} = y^*) = \text{Exp} \left\{ - \left(\left(-\lambda \ln(1 - e^{-\gamma x}) \right)^\theta + \left(-n\beta \ln(1 - e^{-\gamma y^*}) \right)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right\} \\ \times \left(-\lambda \ln(1 - e^{-\gamma x}) \right)^{\theta-1} \left(-n\beta \ln(1 - e^{-\gamma y^*}) \right)^{\theta-1} \\ \times \frac{\lambda \gamma e^{-\gamma x} \left(\left(-\lambda \ln(1 - e^{-\gamma x}) \right)^\theta + \left(-n\beta \ln(1 - e^{-\gamma y^*}) \right)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}-2}}{(1 - e^{-\gamma y^*})^{n\beta} (1 - e^{-\gamma x})} \\ \times \left[-1 + \theta + \left(\left(-\lambda \ln(1 - e^{-\gamma x}) \right)^\theta + \left(-n\beta \ln(1 - e^{-\gamma y^*}) \right)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right]. \quad (16)$$

در ادامه با جایگزینی مقادیر $(\hat{\lambda}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ به جای پارامترهای (λ, β, γ) ، مقدار $\hat{\theta}$ براساس حل معادله غیرخطی

$$\frac{\partial \ln(L(x|y^*))}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^m \left[\frac{1 + \frac{1}{\theta^2} \left((\lambda \hat{P}_{1(i)})^\theta + (n\beta \hat{P}_{2(i)})^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}-1}}{-1 + \theta + \left((\lambda \hat{P}_{1(i)})^\theta + (n\beta \hat{P}_{2(i)})^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}} - \frac{1}{\theta^2} \left((\lambda \hat{P}_{1(i)})^\theta + (n\beta \hat{P}_{2(i)})^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}-1} \right] \\ \times \left[\theta (\lambda \hat{P}_{1(i)})^\theta \ln(\lambda \hat{P}_{1(i)}) - \left((\lambda \hat{P}_{1(i)})^\theta + (n\beta \hat{P}_{2(i)})^\theta \right) \ln \left((\lambda \hat{P}_{1(i)})^\theta + (n\beta \hat{P}_{2(i)})^\theta \right) \right. \\ \left. + (n\beta \hat{P}_{2(i)})^\theta + \theta (n\beta \hat{P}_{2(i)})^\theta \ln(n\beta \hat{P}_{2(i)}) \right] - \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^m \ln \left((\lambda \hat{P}_{1(i)})^\theta + (n\beta \hat{P}_{2(i)})^\theta \right) \\ + (n\beta \hat{P}_{2(i)})^\theta + \sum_{i=1}^m (\lambda \hat{P}_{1(i)})^\theta + \sum_{i=1}^m \ln(n\beta \hat{P}_{2(i)}) \\ + \left(\frac{1}{\theta} - 2 \right) \sum_{i=1}^m \frac{(\lambda \hat{P}_{1(i)})^\theta \ln(\lambda \hat{P}_{1(i)}) + (n\beta \hat{P}_{2(i)})^\theta \ln(n\beta \hat{P}_{2(i)})}{(\lambda \hat{P}_{1(i)})^\theta + (n\beta \hat{P}_{2(i)})^\theta} = 0, \quad (17)$$

محاسبه می‌شود، که در آن $\hat{P}_{1(i)} = -\ln(1 - e^{\gamma x_i})$ و $\hat{P}_{2(i)} = -\ln(1 - e^{\gamma y_i^*})$. با استفاده از خاصیت پایایی برآوردگر درست‌نمایی ماکسیم و با جایگذاری $\hat{\lambda}$ ، $\hat{\beta}$ و $\hat{\gamma}$ به جای λ ، β ، γ و θ در (۱۲)، مقدار \hat{R} یک سیستم موازی در مدل PRHR تحت مفصل GH به دست می‌آید.

۵ مقایسه برآوردگرهای قابلیت اعتماد تنش-مقاومت یک سیستم موازی

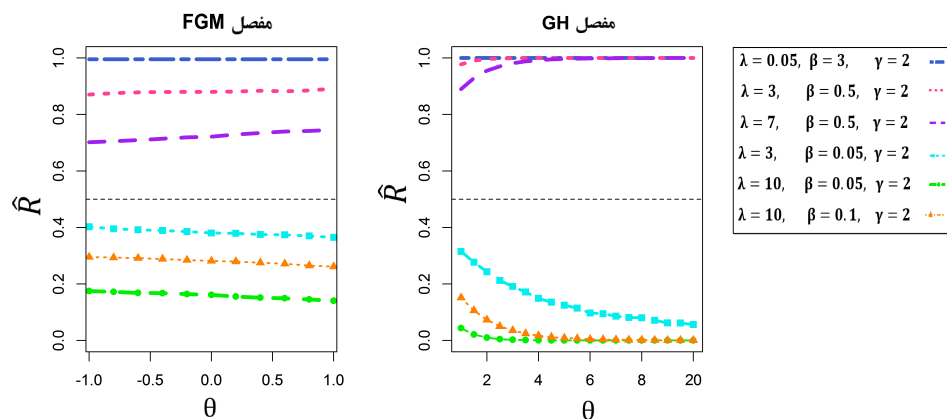
در مدل PRHR تحت دو مفصل FGM و GH به روش شبیه‌سازی

به منظور بررسی عملکرد برآوردگرهای ML قابلیت اعتماد تنش-مقاومت یک سیستم موازی در مدل PRHR تحت دو مفصل FGM و GH، روش شبیه‌سازی مونت کارلو بکار برده می‌شود. در این شبیه‌سازی از مقادیر $\lambda = 0.5$ ، $\beta = 0.9$ ، $\gamma = 0.5$ ، $\theta = 3$ ، $n = 15$ ، $m = 20$ و $R = 0.95$ استفاده می‌شود. در هر حالت m نمونه زوجی از x و y^* تحت دو مفصل FGM و GH با چگالی‌های حاشیه‌ای داده شده از مدل PRHR در (۲) با تابع توزیع پایه، توزیع

نمایی با میانگین $\frac{1}{\gamma}$ شبیه‌سازی می‌شود. همچنین، مقدار $B = 3000$ فرض شده است. در ادامه، رفتار \hat{R} نسبت به پارامتر وابستگی θ به ازای مقادیر مختلف پارامترهای (λ, β, γ) که عبارت است از:

$$\{(\lambda, \beta, \gamma) = (0.05, 3, 2), (3, 0.5, 2), (3, 0.05, 2), (10, 0.05, 2), (10, 0.1, 2), (7, 0.5, 2)\}$$

در شکل ۲ تحت دو مفصل FGM و GH نمایش داده شده است. از این شکل می‌توان نتیجه گرفت که الگوی



شکل ۲: رفتار \hat{R} نسبت به پارامتر وابستگی θ براساس مقادیر متفاوت پارامترها.

رفتاری \hat{R} نسبت به پارامتر وابستگی θ ، همان الگوی رفتاری R نسبت به پارامتر وابستگی θ است. همچنین، مقادیر $MSE(\hat{R}, R)$ و $Bias(\hat{R}, R)$ تحت دو مفصل FGM و GH در جدول‌های ۱ و ۲ گزارش شده است. از جدول ۱ می‌توان نتیجه گرفت که چون $R > 0.5$ با افزایش مقدار θ ، مقدار \hat{R} افزایش می‌یابد. که این نتیجه دقیقاً رفتار \hat{R} تحت مفصل FGM در شکل ۲ تایید می‌کند. همچنین، با افزایش مقدار θ ، $MSE(\hat{R}, R)$ و $Bias(\hat{R}, R)$ افزایش می‌یابند. با افزایش مقدار پارامتر γ که پارامتر توزیع پایه است، مقدار \hat{R} ، $MSE(\hat{R}, R)$ و $Bias(\hat{R}, R)$ تغییر محسوسی ندارند. اما با افزایش مقدار پارامتر β ، مقادیر \hat{R} ، $MSE(\hat{R}, R)$ و $Bias(\hat{R}, R)$ در اکثر مواقع کاهش می‌یابند. با افزایش مقدار n ، مقادیر \hat{R} ، $MSE(\hat{R}, R)$ و $Bias(\hat{R}, R)$ افزایش می‌یابند. تمام نتایج گرفته شده تحت مفصل FGM نیز برای مفصل GH برقرار است. با این تفاوت که روند تغییرات \hat{R} تحت مفصل GH سریع‌تر از مفصل FGM است. همچنین از این جدول‌ها می‌توان مشاهده کرد که $MSE(\hat{R}, R)$ به طور قابل ملاحظه‌ای کوچک هستند.

جدول ۱. مقادیر \hat{R} ، $Bias(\hat{R}, R)$ و $MSE(\hat{R}, R)$ تحت مفصل FGM به ازای $\mathcal{R} = 0.95$ و $m = 20$.

مفصل	\mathcal{R}	m	n	β	γ	θ	\hat{R}	$Bias(\hat{R}, R)$	$MSE(\hat{R}, R)$				
FGM	0.95	20	15	0.9	0.5	- 0.9	0.9247	- 0.0252	0.0010				
						- 0.5	0.9381	- 0.0118	0.0004				
						- 0.1	0.9482	- 0.0018	0.0002				
						0.1	0.9524	0.0025	0.0002				
						0.5	0.9591	0.0091	0.0002				
						0.9	0.9646	0.0146	0.0003				
					0.9	3	- 0.9	0.9247	- 0.0252	0.0010			
							- 0.5	0.9381	- 0.0118	0.0004			
							- 0.1	0.9482	- 0.0018	0.0002			
							0.1	0.9524	0.0025	0.0002			
							0.5	0.9592	0.0091	0.0002			
							0.9	0.9646	0.0146	0.0003			
				0.5	3	0.9	- 0.9	0.9218	- 0.0281	0.0011			
							- 0.5	0.9356	- 0.0144	0.0004			
							- 0.1	0.9461	- 0.0038	0.0002			
							0.1	0.9503	0.0003	0.0001			
							0.5	0.9574	0.0074	0.0002			
							0.9	0.9629	0.0129	0.0002			
						20	30	0.9	0.5	- 0.9	0.9248	- 0.0251	0.0010
										- 0.5	0.9381	- 0.0118	0.0004
										- 0.1	0.9485	- 0.0014	0.0002
										0.1	0.9525	0.0025	0.0002
										0.5	0.9592	0.0092	0.0002
										0.9	0.9646	0.0146	0.0003
0.9	3	- 0.9	0.9248	- 0.0251	0.0010								
		- 0.5	0.9381	- 0.0118	0.0004								
		- 0.1	0.9485	- 0.0014	0.0002								
		0.1	0.9525	0.0025	0.0002								
		0.5	0.9592	0.0092	0.0002								
		0.9	0.9646	0.0146	0.0003								
0.5	3	0.9	- 0.9	0.9227	- 0.0272			0.0011					
			- 0.5	0.9361	- 0.0138			0.0004					
			- 0.1	0.9465	- 0.0034			0.0002					
			0.1	0.9507	0.0007			0.0001					
			0.5	0.9577	0.0077			0.0002					
			0.9	0.9632	0.0132			0.0003					

جدول ۲. مقادیر $\hat{\mathcal{R}}$ ، $Bias(\hat{\mathcal{R}}, \mathcal{R})$ و $MSE(\hat{\mathcal{R}}, \mathcal{R})$ تحت مفصل GH به ازای $\mathcal{R} = 0.95$ و $m = 20$.

مفصل	\mathcal{R}	m	n	β	γ	θ	$\hat{\mathcal{R}}$	$Bias(\hat{\mathcal{R}}, \mathcal{R})$	$MSE(\hat{\mathcal{R}}, \mathcal{R})$			
GH	0.95	20	15	0.9	0.5	2	0.7333	- 0.2166	0.1875			
						4	0.8785	- 0.0714	0.0459			
						6	0.9157	- 0.0342	0.0208			
						8	0.9519	0.0019	0.0053			
						20	0.9834	0.0324	0.0015			
				0.9	3	2	0.7333	- 0.2166	0.1875			
						4	0.8785	- 0.0714	0.0459			
						6	0.9157	- 0.0342	0.0208			
						8	0.9519	0.0019	0.0053			
						20	0.9835	0.0325	0.0015			
			0.5	3	2	0.7202	- 0.2297	0.1985				
					4	0.8702	- 0.0797	0.0512				
					6	0.9096	- 0.0403	0.0237				
					8	0.9484	- 0.0015	0.0061				
					20	0.9821	0.0321	0.0014				
						30	0.9	0.5	2	0.7345	- 0.2154	0.1862
									4	0.8801	- 0.0698	0.0447
									6	0.9168	- 0.0331	0.0202
									8	0.9522	0.0022	0.0052
									20	0.9834	0.0334	0.0015
0.9	3	2					0.7345	- 0.2154	0.1862			
		4					0.8801	- 0.0698	0.0447			
		6					0.9168	- 0.0331	0.0202			
		8					0.9522	0.0022	0.0052			
		20					0.9834	0.0334	0.0015			
0.5	3	2				0.7290	- 0.2209	0.1912				
		4				0.8756	- 0.0743	0.0477				
		6				0.9132	- 0.0367	0.0219				
		8				0.9503	0.0004	0.0055				
		20				0.9826	0.0326	0.0014				

۶ نتیجه گیری

یکی از فرض‌های مهم در مدل‌بندی قابلیت اعتماد، فرض وابستگی بین متغیرها است. در این مقاله از دو تابع مفصل GH و FGM با محدوده متفاوت پارامتر وابستگی θ برای متغیرهای X و $Y_{n:n}$ استفاده گردید. در ادامه فرض شده است که در یک سیستم موازی با n مولفه، متغیرهای تصادفی فشار مشترک تحمیل شده بر روی یکایک مولفه‌ها (X) و مقاومت مولفه i ام (Y_i) از مدل PRHR با تابع توزیع پایه $H(\cdot)$ پیروی کنند. قابلیت اعتماد تنش-مقاومت

یک سیستم موازی در مدل PRHR تحت دو مفصل FGM و GH بدست آورده شده است و ثابت شده که تحت این دو مفصل، مقدار قابلیت اعتماد تنش-مقاومت در مدل PRHR به توزیع پایه وابسته نیست. در ادامه، رفتار پارامتر R نسبت به پارامتر وابستگی θ مورد بررسی قرار داده‌ایم و نتیجه گرفته شده است که روند تغییرات R نسبت به پارامتر وابستگی θ تحت مفصل GH سریع‌تر نسبت به مفصل FGM است. برآورد نقطه‌ای قابلیت اعتماد تنش-مقاومت در مدل PRHR تحت مفصل‌های FGM و GH براساس روش درست‌نمایی ماکسیمم دومرحله‌ای محاسبه گردید. در انتها با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو، برآوردگرهای قابلیت اعتماد تنش-مقاومت در مدل PRHR تحت مفصل‌های FGM و GH مقایسه شد.

مراجع

- [۱] سارا، قنبری. ۱۴۰۱. بررسی قابلیت اعتماد سیستم‌ها در مدل تنش-مقاومت با رویکردهای نیمه‌پارامتری و پویا. رساله دکتری، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد.
- [2] Birnbaum, Z. W. and McCarty, B. C. (1958). *A distribution-free upper confidence bounds for $P_r\{Y < X\}$ based on independent samples of X and Y* , Annals of Mathematical Statistics, 29, 558–562.
- [3] Kotz, S., Lumelskii, Y. and Pensky, M. (2003). *The Stress-Strength Model and Its Generalizations*, World Scientific, Singapore.
- [4] Johnson, R. (1988). *Stress-strength models for reliability*, In Handbook of Statistics: Quality Control and Reliability, Krishnaiah, P. R., Rao, C. R., Eds.; Elsevier Science Publishers B. V., 7, 27–54.
- [5] Ghanbari, S., Rezaei Roknabadi, A., Salehi, M. (2022). *Estimation of stress-strength reliability for Marshall-Olkin distributions based on progressively Type-II censored samples*, Applied Statistics, 49(8):1913–1934. DOI: 10.1080/02664763.2021.1884207.
- [6] Domma, F. and Giordano, S. (2013). *A copula-based approach to account for dependence in stress-strength models*, Statistical Papers, 54, 807–826.
- [7] Gao, J., An, Z. and Liu, B. (2016). *A dependent stress-strength interference model based on mixed copula function*, Mechanical Science & Technology, 30, 4443–4446.
- [8] Morgenstern, D. (1956). *Einfache beispiele zweidimensionaler verteilungen*, Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik, 8, 234–235.
- [9] Nelsen, R. (2007). *An Introduction to Copulas*, Springer Science & Business Media, New York.
- [10] Joe, H. (1997). *Multivariate models and dependence concepts*, Monographs on Statistics and Applied Probability, 73, London: Chapman Hall.



رتبه‌بندی ریسک‌ها بر پایه عدد اولویت ریسک

محمودوند، ر^۱

^۱ گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بوعلی سینا

چکیده

ریسک به عنوان شرایطی که در آن امکان انحراف از یک وضعیت مطلوب وجود دارد، در همه جنبه‌های زندگی بشر قابل بحث است. مدیریت و کنترل پیامدهای نامطلوب ریسک مستلزم شناخت آن است و برای این منظور رویکردهای مختلفی تاکنون مطرح شده است. بدون شک ارزیابی ریسک هسته اصلی مدیریت ریسک است و به طرق مختلفی قابل انجام است. در یک دسته‌بندی به روش‌های کمی، نیمه‌کمی و کیفی اشاره می‌شود. روش‌های کمی بر پایه مدل‌های ریسک کار می‌کنند و برای استفاده‌های عملی به داده‌های تجربی مرتبط با ریسک نیاز دارند. در مقابل روش‌های نیمه‌کمی و کیفی بر پایه قضاوت خبرگان استوار هستند و داده‌های مورد نیاز را در حین ارزیابی فراهم می‌کنند. در میان روش‌های نیمه‌کمی، روش تجربه و تحلیل حالت‌های خرابی و اثرات آنها (FMEA) به عنوان یک روش متداول در حوزه ارزیابی انواع ریسک‌ها، بسیار مورد توجه قرار گرفته است. این روش بر پایه یک شاخص به نام عدد اولویت ریسک کار می‌کند که دستمایه این مطالعه است. عدد اولویت ریسک، به طور همزمان سه جنبه مختلف ریسک، شامل فراوانی، شدت و شانس کشف ریسک را ارزیابی می‌کند و از این نظر می‌تواند گزینه مناسبی برای اولویت‌بندی ریسک‌ها باشد. با این وجود در ادبیات FMEA از لحاظ استنباط آماری کار جدی بر روی این شاخص انجام نشده است. در این مقاله ضمن معرفی عدد اولویت ریسک، درباره استنباط آماری پیرامون این کمیت بحث و نتایج جدیدی ارائه شده است.

کلمات کلیدی: ارزیابی ریسک، بیز، روش‌های نیمه‌کمی، عدد اولویت ریسک

۱ مقدمه

گرم شدن کره زمین، بارش ناکافی، تصادف اتومبیل، بستری شدن یک فرد در بیمارستان، مراجعه بانک به ضامن یک وام گیرنده، انقراض یک گونه جانوری و مثال‌هایی از این دست خبر از حوادث ناخوشایندی می‌دهند که قبل

^۱ r.mahmoudvand@basu.ac.ir

از رخداد قطعیتی در آنها وجود نداشته و پس از رخداد با خود خسارت به همراه دارند. چنین شرایطی را به شرایط ریسکی تعبیر می‌کنیم و ملاحظه می‌کنیم که تمامی شئون زندگی بشر و حتی کلی‌تر از آن تمام مولفه‌های جهان خلقت را شامل می‌شود. در عمل ریسک را نمی‌توان کاملاً حذف کرد؛ بنابراین نگرش علمی به مسأله ریسک چیزی جز مدیریت آن نیست. اولین گام و در واقع هسته اصلی فرآیند مدیریت ریسک، ارزیابی ریسک است. ارزیابی ریسک، تعریف سیستم و حدود آن، تشخیص رویداد زیان‌آور، ارزیابی احتمال‌ها و اثرها/ پیامدها را در بر می‌گیرد (نزیر، ۲۰۰۷). قاسمی و محمودوند (۱۳۹۳) با یک مرور نسبتاً کامل، روش‌های ارزیابی ریسک را با رویکرد آماری دسته‌بندی کردند. محمودوند (۱۴۰۰) در حوزه روش‌های کمی به ترتیب‌های تصادفی و رجحان آماری به عنوان رویکردهایی که در اولویت‌بندی ریسک‌ها می‌توانند مفید واقع شوند اشاره کرده است و به اختصار درباره مزایا و معایب آنها بحث کرده است. به کارگیری روش‌های کمی نیازمند وجود داده‌های مناسبی درباره سوابق ریسک است. این در حالیست که برای برخی از ریسک‌ها ممکن است هیچ داده‌ای وجود نداشته باشد یا لااقل در دسترس نباشد. به عنوان نمونه ممکن است یک وسیله/سیستم به تازگی اختراع و وارد بازار مصرف شده باشد یا آنکه صاحبان یک کسب و کار در دوران فعالیت خود سوابق داده‌ای را ثبت نکرده باشند. در چنین شرایطی روش‌های کیفی و نیمه‌کمی می‌توانند نقش‌آفرینی کنند. این روش‌ها بر پایه قضاوت خبرگان استوار هستند و داده‌های مورد نیاز را در حین ارزیابی فراهم می‌کنند. در میان روش‌های نیمه‌کمی، روش تحلیل حالت‌های خرابی و اثرات آنها (FMEA) به عنوان یک روش متداول در حوزه ارزیابی انواع ریسک‌ها، بسیار مورد توجه قرار گرفته است. این روش بر پایه یک شاخص به نام عدد اولویت ریسک کار می‌کند که دستمایه این مطالعه است. با وجود آنکه بیش از ۶۰ سال از معرفی این روش و به‌کارگیری آن در بهبود قابلیت اعتماد به سیستم‌ها در حوزه‌های مختلفی چون صنایع هوافضا، توربین‌های بادی، بهداشت و سلامت، صنایع غذایی، سازه‌های عمرانی، معدن‌کاوی و... می‌گذرد همچنان از لحاظ نظری کارهای اندکی در این زمینه صورت گرفته است؛ برای یک مرور یا توجون وو و جین وو (۲۰۲۱) را ببینید. در این مقاله درباره عدد اولویت ریسک، که ابزار کمی‌سازی و اولویت‌بندی ریسک‌ها در روش FMEA است، بحث می‌شود و نتایج جدیدی درباره این شاخص ارائه می‌شود.

۲ عدد اولویت ریسک

اولویت‌بندی ریسک‌ها، مستلزم تعیین سنجه‌های مناسب برای هر ریسک است. در نظریه ریسک معمولاً از فراوانی رخداد حوادث و شدت آسیب‌ها یا پیامدهای احتمالی برای کمی‌سازی ریسک کمک می‌گیرند. در روش FMEA علاوه بر این دو سنجه، از شانس کشف ریسک هم استفاده می‌شود. چنانکه استاماتیس (۲۰۰۳) بیان می‌کند، روش FMEA برای شناسایی و پیشگیری از مواجه شدن مشتریان با مشکلات معین و بالقوه است. بر این اساس، وجود مولفه شانس کشف ریسک در تعیین عدد اولویت ریسک توجه منطقی و عملی پیدا می‌کند. برای اندازه‌گیری سنجه‌هایی که گفته شد، روش‌های مختلفی مطرح شده است اما متداول‌ترین روش، استفاده از نظر خبرگان است. فرض کنید متغیرهای S ، O و D به ترتیب نمایانگر فراوانی، شدت و شانس کشف یک ریسک باشد و مقادیر این متغیرها بر اساس ویژگی‌های جدول ۱، عددی از مجموعه $\{1, 2, \dots, 10\}$ باشد. دقت کنید که مقادیر کوچک برای دو متغیر فراوانی و شدت ریسک به معنی کم بودن آنها در ریسک است اما برای متغیر شانس کشف برعکس است؛ یعنی هرچه مقدار نسبت داده شده کوچک‌تر باشد بدان معناست که شانس کشف بیشتر و در نتیجه اولویت ریسک کمتر است.

جدول ۱. مقیاس بندی مولفه های عدد اولویت ریسک

مقدار	D	O	S
۱	تقریبا همیشه	تقریبا هرگز	هیچ
۲	خیلی زیاد	بعید	خیلی ناچیز
۳	زیاد	خیلی ناچیز	ناچیز
۴	بالای متوسط	ناچیز	کم
۵	متوسط	کم	متوسط
۶	کم	متوسط	قابل توجه
۷	ناچیز	بالای متوسط	زیاد
۸	خیلی ناچیز	زیاد	خیلی زیاد
۹	بعید	خیلی زیاد	جدی
۱۰	غیرممکن	تقریبا همیشه	پرخطر

با این تعاریف، عدد اولویت ریسک را با R نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$R = O \times S \times D. \quad (1)$$

با توجه به فرمول، واضح است که عدد اولویت ریسک، مقدار یست بین ۱ تا ۱۰۰۰ که هر چه بزرگ تر باشد به معنای بالاتر بودن اولویت ریسک است. البته کمیت R همه مقادیر ۱ تا ۱۰۰۰ را اختیار نمی کند؛ به عنوان مثال بین ۹۰۰ و ۱۰۰۰ هیچ مقداری برای عدد اولویت ریسک وجود ندارد. با استفاده از یک برنامه کامپیوتری می توان دید که کل تعداد مقادیر متمایزی که عدد اولویت ریسک اختیار می کند برابر ۱۲۰ مورد است که برخی از آنها فراوانی بیشتر و برخی فراوانی کمتر دارند. شکل ۱ نمودار فراوانی نسبی مقادیر ممکن این کمیت را نمایش می دهد. با توجه به ماهیت غیرقطعی ریسک، R یک متغیر تصادفی است که فرض می کنیم دارای تابع جرم احتمال $f_R(r)$ باشد. به سادگی داریم:

$$f_R(r) = \sum_{\{(s,o,d):s \times o \times d=r\}} P(S=s, O=o, D=d). \quad (2)$$

در صورت استقلال متغیرهای شدت، فراوانی و شانس کشف ریسک تابع جرم احتمال عدد اولویت ریسک به صورت زیر خواهد بود:

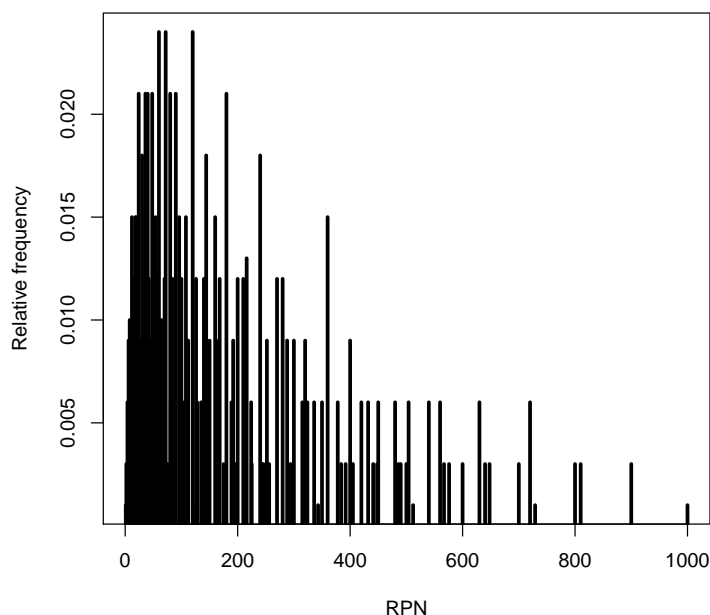
$$f_R(r) = \sum_{\{(s,o,d):s \times o \times d=r\}} P(S=s)p(O=o)p(D=d). \quad (3)$$

تحت فرض استقلال به سادگی داریم:

$$\mu_R = E(R) = E(S) \times E(O) \times E(D). \quad (4)$$

۳ استنباط آماری درباره عدد اولویت ریسک

فرض کنید n فرد قرار است درباره ریسکها اعلام نظر کنند. به علاوه فرض کنید S_i, O_i, D_i نمایانگر نظرات فرد i باشند و عدد اولویت ریسک تحت بررسی از دید این فرد را با R_i نمایش دهیم. در این صورت می توان گفت که



شکل ۱: توزیع فراوانی نسبی عدد اولویت ریسک

یک نمونه n تایی از توزیع $f_R(r)$ است. یکی از مسائل مهمی که می‌توان از دیدگاه آماری مورد توجه قرار داد، مربوط به ارائه برآورد $E(R)$ است. در حالت کلی یک برآوردگر ناریب برای این کمیت، میانگین نمونه است:

$$\hat{\mu}_R^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i. \quad (5)$$

تحت فرض استقلال مولفه‌های عدد اولویت ریسک، با توجه به فرمول (۳) یک برآوردگر شهودی از میانگین مقدار عدد اولویت ریسک به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\hat{\mu}_R^{(1)} = \bar{S} \times \bar{O} \times \bar{D}; \quad (6)$$

که در آن:

$$\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i ; \quad \bar{O} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n O_i ; \quad \bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i.$$

علاوه بر این می‌توان از میانگین هندسی R_i ها هم برآوردگر دیگری به صورت زیر به دست آورد:

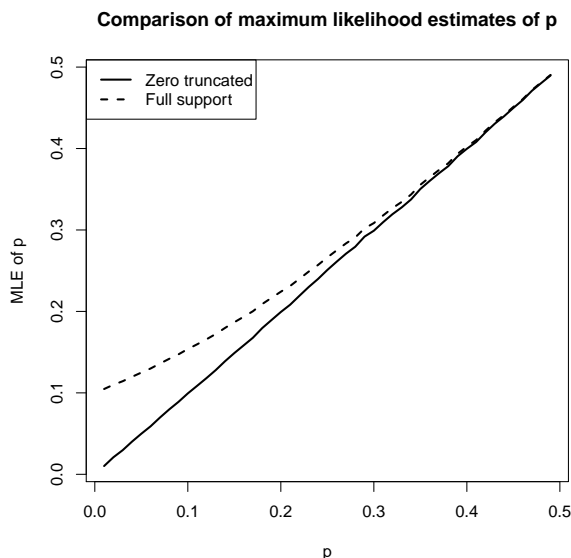
$$\hat{\mu}_R^{(2)} = \exp \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log R_i \right\}. \quad (7)$$

بررسی عملکرد این برآوردگرها مستلزم داشتن توزیع عدد اولویت ریسک است. بنابراین مساله کلی‌تر، محاسبه توزیع متغیر R است. استاماتیس (۲۰۰۳) اشاره‌ای به توزیع‌های ممکن برای مولفه‌های سه‌گانه عدد اولویت ریسک دارد.

از جمله آنکه اشاره می‌کند توزیع نرمال برای مولفه فراوانی رخدادهای خسارت، توزیع لگ-نرمال برای مولفه شدت و یک توزیع گسسته برای مولفه شانس کشف می‌تواند در نظر گرفته شود. قاسمی (۲۰۱۶) با فرض دوجمله‌ای بودن توزیع مولفه‌های فراوانی، شدت و شانس کشف درباره توزیع عدد اولویت ریسک بحث کرده است. یائوجون وو و جین وو (۲۰۲۱) از توزیع بتا-دوجمله‌ای برای مولفه‌های عدد اولویت ریسک استفاده کرده است و یک الگوریتم که از رویکرد فازی و آمار بیز بهره گرفته است برای اولویت‌بندی ریسک‌ها ارائه کرده است. البته در مقاله‌های قاسمی (۲۰۱۶) و یائوجون وو و جین وو (۲۰۲۱) درباره به‌کارگیری توزیع دوجمله‌ای وجود دارد یک مشکل کوچک وجود دارد که در اینجا به آن اشاره شده است. با توجه به آنکه مقادیر مولفه‌های شدت، فراوانی و شانس کشف در مجموعه اعداد صحیح و $\{1, \dots, 10\}$ است یک توزیع گسسته مانند توزیع دوجمله‌ای می‌تواند گزینه مناسبی باشد زیرا می‌توان اینطور توجیه کرد که هر خبره تنها یکی از اعداد ۱ تا ۱۰ را انتخاب می‌کند و عدد منتخب را به مثابه موفقیت در نظر گرفت. اما مشکلی که وجود دارد مربوط به مقدار صفر است که در توزیع دوجمله‌ای دارای جرم احتمال مثبتی است. پیشنهادی که می‌توان برای حل این مشکل مطرح کرد استفاده از توزیع دوجمله‌ای بریده شده در صفر است. اگر X_1, \dots, X_n یک نمونه از توزیع دوجمله‌ای با پارامتر اندازه m و احتمال موفقیت p باشد به سادگی می‌توان نشان داد که برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر p در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\bar{X} = \frac{mp}{1 - (1-p)^m}. \quad (۸)$$

توجه داریم که برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر p در توزیع کامل دوجمله‌ای برابر \bar{X}/m است. از رابطه (۸) واضح است که هرچقدر مقدار پارامتر p کوچکتر باشد، اختلاف بین برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی بر اساس مدل دوجمله‌ای بریده شده در صفر با مدل دوجمله‌ای عادی بیشتر خواهد شد. این موضوع با استفاده از یک شبیه‌سازی در شکل ۲ نیز نمایش داده شده است.



شکل ۲: تاثیر بریدن صفر از تکیه گاه توزیع دوجمله‌ای بر برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر احتمال موفقیت

۴ نتایج جدید

چنانکه دیدیم در نظر گرفتن توزیع هر مولفه‌ای عدد اولویت ریسک به عنوان یک توزیع دوجمله‌ای نیازمند یک اصلاحیه کوچک بود اما مشکل اصلی‌تر مربوط به آن است که مولفه‌های عدد اولویت ریسک لزوماً مستقل از یکدیگر نیستند و در نظر گرفتن توزیع‌های دوجمله‌ای برای هر مولفه ممکن است در عمل ارزیابی خوبی از ریسک فراهم نکند. پیشنهادی که در اینجا مطرح می‌کنیم استفاده از توزیع چندجمله‌ای هست. فرض کنید $N_{i,j}$ که در آن $j \in \{1, 2, \dots, 10\}$ نشان دهنده فراوانی تعداد دفعات مشاهده عدد j در ارزیابی فرد i از مولفه‌های عدد اولویت ریسک باشد. به عنوان مثال اگر فردی مقادیر $(S_i = 7, O_i = 7, D_i = 2)$ را به عنوان ارزیابی اعلام کند آنگاه:

$$N_{i,2} = 1, N_{i,7} = 2, N_{i,j} = 0; j \neq \{2, 7\}.$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که

$$S_i D_i O_i \stackrel{d}{=} (N_{i,1}, \dots, N_{i,10}) \quad (9)$$

با فرض آنکه p_j احتمال انتخاب عدد j باشد می‌توان نتیجه گرفت که:

$$P(R = s_i o_i d_i) = P(N_{i,1} = n_{i,1}, \dots, N_{i,10} = n_{i,10}) = \frac{3!}{\prod_{j=1}^{10} n_{i,j}!} \prod_{j=1}^{10} p_j^{n_{i,j}}.$$

حال با داشتن n ارزیاب می‌توان دید که برآوردگر درست‌نمایی ماکسیمم برای پارامترهای این توزیع چندجمله‌ای به صورت زیر است:

$$\hat{p}_j = \frac{\sum_{i=1}^n N_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{10} N_{i,j}} = \frac{\sum_{i=1}^n N_{i,j}}{3n} = \frac{1}{3} \bar{N}_j. \quad (10)$$

این برآوردگر به مقادیری که توسط هیچ ارزیابی انتخاب نشده احتمال صفر نسبت می‌دهد که ممکن است در عمل گاهی به دلیل قلت و تجربه ارزیابان ریسکی باشد. رویکرد دیگر استفاده از برآوردگر بیزی برای این پارامترهاست. اگر از پیشین یکنواخت استفاده کنیم به سادگی می‌توان دید که توزیع پسین به صورت زیر است:

$$f(p_1, \dots, p_{10} | n_{i,1}, \dots, n_{i,10}) \propto \prod_{j=1}^{10} p_j^{\sum_{i=1}^n n_{i,j}}, \quad (11)$$

که همان توزیع دیریکله هست و لذا با در نظر گرفتن میانگین توزیع پسین به عنوان یک برآوردگر بیز داریم:

$$\hat{p}_j = \frac{\sum_{i=1}^n N_{i,j} + 1}{\sum_{i=1}^{10} \left(\sum_{j=1}^n N_{i,j} + 1 \right)} = \frac{\sum_{i=1}^n N_{i,j} + 1}{3n + 10}. \quad (12)$$

حال برای برآورد عدد اولویت ریسک الگوریتم زیر پیشنهاد می‌شود:

مرحله ۰: ارزیابی‌های (s_i, o_i, d_i) را به نمونه‌های معادل $(n_{i,1}, \dots, n_{i,10})$ تبدیل کنید

مرحله ۱: مقادیر $n_{i,j} = \sum_{j=1}^n n_{i,j}$ را با توجه به داده‌ها مشخص کنید

مرحله ۲: برآورد بیزی پارامترهای احتمال رتبه‌ها را از فرمول (۴,۴) به دست آورید

مرحله ۳: از توزیع چندجمله‌ای با پارامترهای مرحله قبل به تعداد دلخواه نمونه تصادفی تولید کرده و مقادیر عدد اولویت ریسک برای هر نمونه محاسبه می‌شود

مرحله ۴: میانگین نمونه‌های عدد اولویت ریسک در مرحله ۳ را محاسبه کرده و به عنوان عدد اولویت ریسک گزارش کنید.

۱.۴ مثال واقعی

انفجار مخازن در ارزیابی ریسک‌های پالایشگاه‌ها به عنوان یکی از مصادیق ریسک در نظر گرفته می‌شود. در یکی از پالایشگاه‌های کشور از ۲۰ کارشناس خبره خواسته شد فرم‌های مربوط به بررسی حالات خرابی و پیامدهای آنها برای ریسک انفجار را بررسی کنند و عدد اولویت ریسک را مشخص کنند. رتبه‌های داده شده دارای مقادیر متوسط ۵,۱۵ و ۳,۴۵، ۸,۸۵، ۳,۴۵ و ۵,۱۵ برای مولفه‌های شدت، فراوانی و شانس کشف بودند. بنابراین اگر از ضرب متوسط این سه مولفه استفاده کنیم برآورد عدد اولویت ریسک برابر حدود ۱۵۷ است. همچنین اگر میانگین ۲۰ عدد اولویت ریسک را محاسبه کنیم به مقدار حدود ۱۶۰ می‌رسیم. در حالیکه اگر از رویکرد جدید استفاده کنیم بر اساس ۱۰ هزاربار نمونه‌گیری و محاسبه مقدار متوسط به عدد حدود ۱۹۲ می‌رسیم.

۵ نتیجه‌گیری و مطالعات آتی

در این مقاله ضمن معرفی روش FMEA به عنوان یک روش مناسب در ارزیابی ریسک نیمه کمی، درباره توزیع عدد اولویت ریسک بحث شد. در این راستا یکی از اشکالاتی که در بررسی‌های قبلی در حین برازش توزیع دوجمله‌ای به مولفه‌های عدد اولویت ریسک مغفول مانده بود، مورد توجه قرار گرفته شد و نشان داده شد که این موضوع در شرایطی که مقادیر مولفه‌ها کوچک باشند می‌توانند باعث بزرگنمایی در برآورد پارامتر نسبت توزیع دوجمله‌ای باشند. علاوه بر این برای در نظر گرفتن ارتباط ذاتی بین مولفه‌های عدد اولویت ریسک، استفاده از توزیع چندجمله‌ای پیشنهاد شد و با در نظر گرفتن رویکرد بیزی، برآورد مناسبی برای پارامترهای این توزیع فراهم شد. در نهایت با استفاده از این رویکرد الگوریتم کاربردی برای برآورد عدد اولویت ریسک معرفی شد. مثال عددی واقعی نشان داد که اختلاف قابل توجهی بین نتایج حاصل از رویکرد جدید با رویکرد تجربی متداول وجود دارد.

مراجع

- [۱] شمسی قاسمی و رحیم محمودوند. (۱۳۹۳). ارزیابی ریسک چارچوب جامع برای دسته بندی انواع روش های نوین ارزیابی ریسک. فصلنامه نظریه های نوین اقتصاد. شماره ۲.
- [۲] رحیم محمودوند. (۱۴۰۰). کاربرد ترتیب‌های تصادفی در مدیریت ریسک. هفتمین سمینار قابلیت اعتماد و کاربردهای آن. دانشگاه بیرجند.

- [3] Nazir, M. (2007). *Quantitative Risk Assessment of a marine riser: an integrated approach*. Ph.D Thesis, Faculty of Engineering and Applied Science, Memorial University of Newfoundland.
- [4] Stamatis, D. H. (2003). *Failure mode and effect analysis: FMEA from theory to execution*. Quality Press.
- [5] Wu, X., Wu, J. (2021). *The risk priority number evaluation of FMEA analysis based on random uncertainty and fuzzy uncertainty*. Complexity, 2021, 1-15.



آسیب شناسی قرائت مصرف آب در شرکت آبفا با استفاده از رویکردهای داده کاوی

معمری، ف ۱ و محمودوند، ر ۲

۱ گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بوعلی سینا

۲ گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بوعلی سینا

چکیده

شرکت آبفا به عنوان تنها متولی توزیع آب در ایران، از طریق کنتورهای نصب شده برای هر انشعاب، میزان آب مصرفی در هر دوره را محاسبه کرده و نسبت به محاسبه آب بها برای مشترکین اقدام می کند. آبفا برای این منظور از روش های مختلفی چون مراجعه مامور کنتورخوان و خوداظهاری مشترک به صورت ادواری در گذر زمان استفاده می کند. در این میان داشتن یک برنامه زمانی منظم، دقت در قرائت مصرف، ثبت ارقام و ساختن یک بانک داده ای با کیفیت برای بهره برداری از رویکردهای تحلیل داده در شرکت آبفا ضروری است. در این مقاله با استفاده از داده های واقعی یکی از شهرهای استان همدان در بازه زمانی فروردین ۱۳۹۶ تا آبان ۱۴۰۱ به مطالعه این ویژگی ها پرداخته شده است. بررسی اولیه داده ها نشان داد که داده های مذکور به صورت خام از قابلیت کافی برای چنین بهره برداری برخوردار نیستند. برای حل این مشکل یک روش ابتکاری پیشنهاد شد و نشان داده شد که می توان از این روش نسبت به استخراج مشکلات آبفا در حوزه کنتورخوانی استفاده کرد.

کلمات کلیدی: سری زمانی، کنتور، مصرف آب، نقطه تغییر

۱ مقدمه

رقابت بر سر گسترش سیطره بر منابع محدود آب یکی از مسائل جدی جهان خواهد بود [۳]. قرار گرفتن کشور ما در منطقه ای خشک و کم آب خاورمیانه، رشد جمعیت و مصرف بی رویه آب ایجاب می کند الگوی مصرف مناسب

^۱f.moameri@basu.ac.ir

^۲r.mahmoudvand@basu.ac.ir

تبیین گردیده و مدیریت بهینه توزیع آب در شبکه آبرسانی جدی تر تلقی شود. این وظیفه خطیر بر عهده‌ی شرکت آب و فاضلاب (آبفا) به عنوان تنها متولی رسمی توزیع آب در کشور قرار دارد. به علاوه این شرکت مسئول تعیین میزان مصرف آب و تعیین مقدار فروش آب نیز می‌باشد. کنتورهای آب دستگاه‌های اندازه‌گیری میزان فروش آب شرکت‌های آبفا به شمار می‌روند پس دقت آن‌ها یکی از عوامل موثر بر درآمد شرکت‌های آبفا و مدیریت مصرف آب است. خطا در ثبت داده‌های کنتورهای آب و عدم رعایت فواصل زمانی منظم قرائت کنتور از عوامل موثر بر نامطلوب بودن برنامه‌ریزی و مدیریت توزیع آب و میزان درآمد حاصل از فروش آن هستند. از سوی دیگر این موارد هم بر کیفیت تحلیل داده‌های جمع‌آوری شده از قرائت کنتورها تاثیر نامطلوبی دارد و هم یکی از اجزای اصلی آب بدون درآمد است.

آب بدون درآمد شامل مصرف مجاز بدون درآمد (اندازه‌گیری شده و نشده)، هدر رفت ظاهری (مصارف غیرمجاز، خطای مدیریت داده‌ها و سیستم و عدم دقت تجهیزات اندازه‌گیری) و هدر رفت واقعی (نشت از انشعابات مشترکین، نشت از شبکه توزیع، نشت از خطوط انتقال و نشت و سرریز از مخازن) است [۲].

عدم دقت در کنتورها با عوامل مختلفی ممکن است به وجود آید؛ خطای ناشی از عملکرد کنتور (مثل فرسودگی قطعات کنتور)، تاثیر شرایط آب بر سیستم اندازه‌گیری (مثل درجه حرارت بالا یا خیلی پایین و مواد معلق در آن)، تاثیر تجهیزات جانبی بر عملکرد کنتور، تاثیر شرایط محیطی و جغرافیایی بر سیستم اندازه‌گیری (مانند فشار، رطوبت، سرما و گرما)، نحوه‌ی نصب و نگهداری کنتور، میزان تجربه افراد و نحوه قرائت کنتور، تمیز نبودن فیلتر، جنس نامرغوب چرخ دنده‌ها و نگهداری نامناسب کنتور در انبار از مهم‌ترین آن‌ها به شمار می‌آیند [۴، ۱].

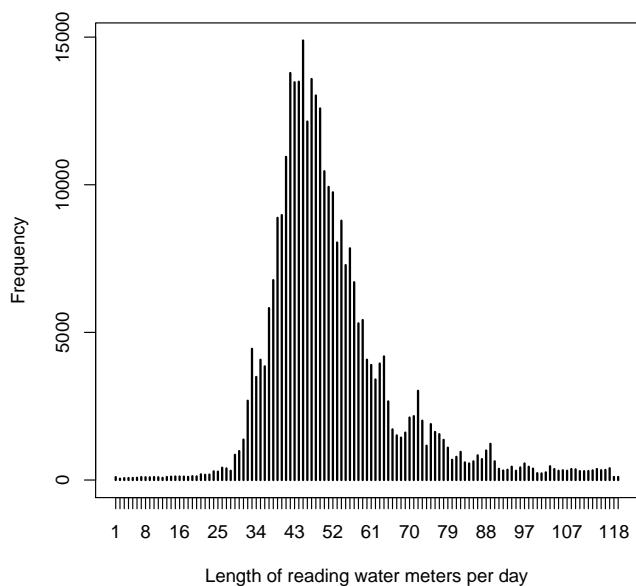
هدف از این مقاله ارائه روشی برای دسته‌بندی داده‌های خام قرائت کنتورهای آب یکی از شهرهای استان همدان است. لذا ما در این مقاله صرف نظر از عوامل موثر بر خرابی کنتور قصد داریم با ارائه راهکاری برای تحلیل داده‌های قرائت شده از کنتورهای آب که به صورت خام قابل بهره‌برداری نبودند به استخراج مشکلات آبفا در حوزه کنتور خوانی کمک کنیم.

۲ توصیف داده‌ها

در این پژوهش داده‌های حاصل از قرائت کنتور در شهر بهار استان همدان دارای اشتراک خانگی در بازه زمانی فروردین ۱۳۹۶ تا آبان ۱۴۰۱ با بیش از ۳۲۴ هزار رکورد داده که در آن هر رکورد نماینده یک مشترک خانگی و شامل اطلاعات الگوی معافیت بدهی، تاریخ تایید قرائت فعلی، قرائت قبلی، تعداد دانش آموز، تعداد روز قرائت، تعداد روز گرم دوره قرائت، رقم فعلی کنتور، رقم قبلی کنتور، شناسه سهمیه، شناسه نحوه محاسبه مصرف، شناسه نوع فروش، شناسه کاربری، مبلغ مصرف، مصرف مازاد، مصرف گروه، میانگین سالیانه، میانگین ماهیانه و میانگین مصرف گروه می‌باشد، مورد بررسی قرار گرفت.

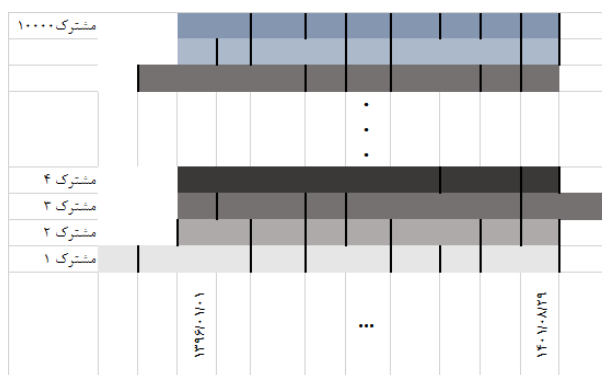
طبق مقررات شرکت آبفا می‌بایست هر دو ماه یکبار قرائت کنتور انجام شود پس باید بتوان از روی برنامه تعیین شده برای قرائت کنتور هر مشترک میزان مصرف آب در تاریخ یا دوره مشخصی را به دست آورد اما در واقع چنین نیست زیرا قرائت‌ها به دلایل مختلفی مانند عدم حضور مشترک، ممانعت از قرائت، پوشاندن کنتور در فواصل زمانی نامتعارف و متفاوتی انجام می‌شود به طوری که در این بانک داده قرائت‌ها از یک روز تا ۱۴۰۳ روز با میانگین دوره قرائت حدود ۵۴ روز متغیر است. با توجه به اینکه بیشینه طول دوره قرائت ۱۴۰۳ روز و با انحراف معیار ۲۴ روز است، به نظر می‌رسد که تمرکز اغلب داده‌ها پیرامون میانگین باشد و نمودار بر اساس ۳ انحراف معیار فاصله از میانگین به صورت شکل ۱ است. در این شکل توزیع فراوانی مصرف آب در یک روز نشان می‌دهد که توزیع دوره

Distribution of the length of read (truncated at 120 days)



شکل ۱: توزیع فراوانی طول دوره قرائت

قرائت دارای چولگی مثبت است به این معنی که وجود دوره‌های قرائت با مدت زیاد در بین داده‌ها محتمل است. یکسان نبودن بازه‌های قرائت کنتور از یک سو و بزرگی داده‌ها از سوی دیگر موجب شد تا از داده‌های خام نتوان



شکل ۲: نمودار شماتیک قبوض آب در شهرستان بهار بر اساس بازه‌های قرائت کنتور

به مدل‌سازی سری زمانی برای الگوی مصرف کلی در بخش خانگی رسید. به عنوان مثال اگر شروع دوره برای مشترکی ۱۳۹۶/۰۱/۰۵ بوده، برای دیگری ۱۳۹۶/۰۱/۲۰ است و اگر بازه قرائت برای یکی ۳۸ روزه بوده برای یکی دیگر ممکن است ۶۷ روزه باشد. در شکل ۲ نمودار شماتیک قبوض آب در شهرستان بهار بر اساس بازه‌های قرائت کنتور را آورده‌ایم.

بنابراین دوره‌های قرائت کنتور و یا تاریخ قرائت‌ها نمی‌تواند مبنای خوبی برای محاسبه میزان مصرف در تاریخ یا دوره‌ای معین باشد. از طرفی دیگر میزان مصرف به صورت دوره‌ای ثبت شده و به دلیل پراکندگی زمان‌های قرائت

کنتور و نامنظم بودن بازه‌ها، میزان مصرف روزانه یا هفتگی یا حتی ماهانه را نمی‌توان از روی داده‌های خام ثبت شده از کنتور مشترکین تعیین کرد.

۱.۲ راه‌کار پیشنهادی

به منظور حل مشکل پراکندگی زمان‌های قرائت کنتور و نامنظم بودن بازه‌ها، ما ابتدا مصرف متوسط روزانه هر مشترک را محاسبه کردیم. فرض کنید قبض i -ام مربوط به دوره‌ی (t_{i1}, t_{i2}) و مجموع مصرف در این دوره S_i باشد. به علاوه فرض کنید کل مصرف آب در یک روز معین مانند t با Y_t و تعداد مشترکین دارای مقدار مصرف آب در نقطه t با N_t نشان داده شود، آنگاه

$$Y_t = \sum_{\{i: t_{i1} \leq t \leq t_{i2}\}} \frac{S_i}{t_{i2} - t_{i1}} = \sum_{i=1}^{N_t} \bar{S}_i ; \bar{S}_i = \frac{S_i}{t_{i2} - t_{i1}}. \quad (1)$$

یعنی Y_t یک مجموع مرکب است پس اگر \bar{S}_i ها متغیرهای هم‌توزیع و مستقل از N_t باشند، آنگاه

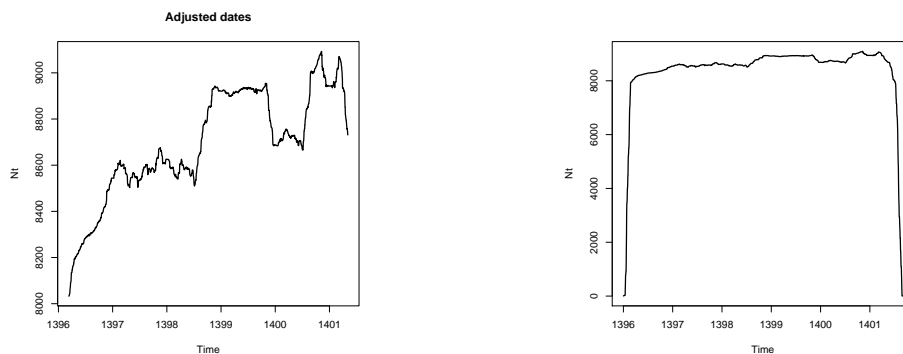
$$E(Y_t) = E(N_t)E(\bar{S}_i) = \lambda(t)E(\bar{S}_i). \quad (2)$$

که در این رابطه $\lambda(t)$ نرخ تعداد مشترکینی است که در زمان t مصرف ثبت شده دارند. حال که N_t یعنی تعداد مشترکین دارای مقدار مصرف آب در نقطه t به دست آمد می‌توان مقدار مصرف میانگین هر قبض را با استفاده از رابطه زیر محاسبه نمود.

$$\text{میانگین مصرف هر قبض} = \frac{Y_t}{N_t}. \quad (3)$$

مصرف متوسط روزانه هر مشترک را از رابطه ۱ به دست آورده و سپس برآورد مصرف روزانه کل مشترکین را محاسبه کردیم. به این ترتیب شرایط برای استفاده از سری زمانی فراهم گردید.

۲.۲ ساخت سری زمانی



شکل ۳: سری زمانی تعداد مشترکین دارای مصرف روزانه

الگوریتم ساخت سری زمانی بر اساس مراحل زیر طراحی گردید:

۱. تقویم روزانه ایجاد شود؛

۲. طبق فرمول ۳ برای کل زمان تقویم، محاسبات به صورت روزانه انجام شود؛

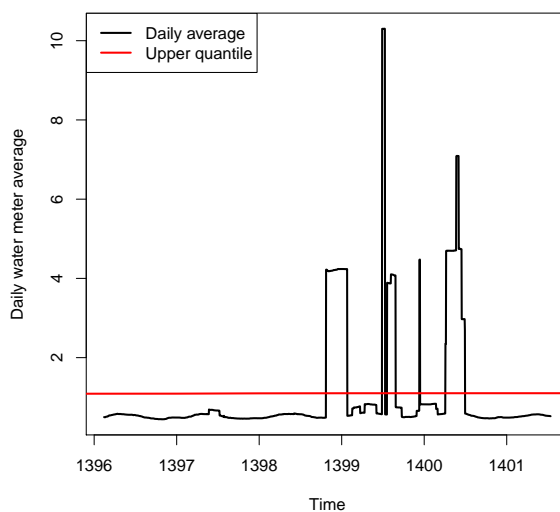
۳. نتایج مرحله‌ی (۲) در ستون جدیدی قرار داده شود؛

۴. با استفاده از ستون جدید سری زمانی ساخته شود.

در سمت راست شکل ۳ سری زمانی مصرف روزانه نمایش داده می‌شود. در این شکل کل دوره از فروردین ۱۳۹۶ تا ۲۹ آبان ۱۴۰۱ در نظر گرفته شده است. طبیعی است که ابتدا و انتهای نمودار مقدار مصرف بسیار کم باشد زیرا برای ابتدای نمودار به اطلاعات سال ۱۳۹۵ و در انتهای آن نیز به اطلاعات ماه‌های آذر و پس از آن نیاز است و ما به آن‌ها دسترسی نداشتیم. در واقع چنین به نظر می‌رسد ۲۹ آبان ۱۴۰۱ که آخرین روز بوده، تعداد قرائت کنتور انجام شده کم بوده است. برای واضح‌تر شدن نمودار ۷۱ روز از ابتدا و انتهای سری را کنار گذاشته شد تا نموداری همانند شکل سمت چپ به دست آید.

۳ تحلیل داده‌ها

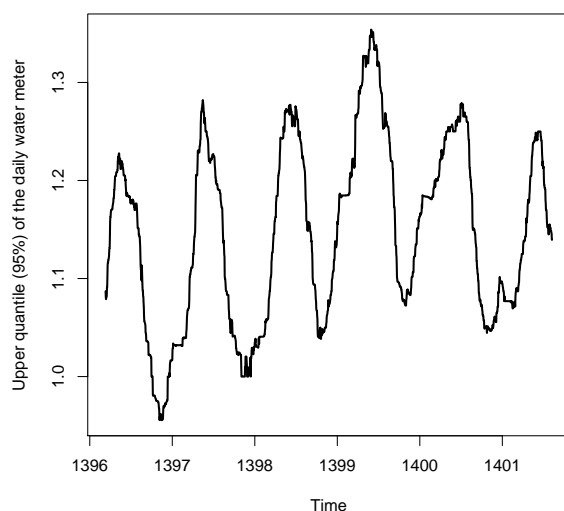
داده‌های خام حاصل از قرائت کنتور آب به دلیل نوسان در دوره‌های قرائت، قابلیت تحلیل مفیدی نداشت اما با ساخت یک سری زمانی مناسب (تقریبی) توانستیم تحلیل با قابلیت اعتماد مطلوبی از داده‌ها ارائه کنیم.



شکل ۴: متوسط مصرف آب روزانه از سال ۱۳۹۶ تا ۱۴۰۱ در شهر بهار

همان‌طور که در شکل ۴ دیده می‌شود متوسط مصرف روزانه در سال‌های ۱۳۹۶ تا چند ماه پیش از سال ۱۳۹۹ نوسان اندکی داشته و مقدار مصرف کمتر از ۱/۵ متر مکعب در روز بوده است، به طوری که طبق شکل ۵ حدود ۹۵ درصد قبض‌ها متوسط مصرف روزانه‌ای کمتر از ۱/۴ متر مکعب در روز داشته‌اند. اما در ماه‌های پایانی سال

۱۳۹۸ و ۱۳۹۹ مقدار مصرف روزانه ناگهان با رشد زیادی مواجه شده و به بیش از ۱۰ متر مکعب در روز رسیده است. در سال ۱۴۰۰ این مقدار با کاهش مواجه شده اما به مقدار پیش از سال ۱۳۹۹ نرسیده و مجدداً تا اواخر ۱۴۰۰ نوسان‌های مصرف همواره با افزایش آن مواجه بوده است تا اینکه در سال ۱۴۰۱ مجدداً کاهش چشمگیری یافته و به مقدار مصرف پیش از سال ۱۳۹۹ نزدیک شده است.



شکل ۵: متوسط مصرف آب روزانه از سال ۱۳۹۶ تا ۱۴۰۱ در شهر بهار

نکته حائز اهمیت در نمودار شکل ۵ کران بالای مصرف روزانه است که نشان می‌دهد در بازه‌های زمانی مختلف چقدر مصرف خارج از الگوی متوسط مصرف آب صورت گرفته با وجود این‌که در نظر گرفتن این کران بالا موجب می‌گردد تا الگوی مصرف فصلی از نظر پنهان بماند اما آگاهی از آن برای تعیین احتمال مصرف بالاتر از متوسط مفید است.

از مشاهدات و بررسی‌ها چنین استنباط می‌شود که پاندمی کووید ۱۹ که از اواخر سال ۱۳۹۸ آغاز شده و در سال ۱۳۹۹ و اواخر سال ۱۴۰۰ ادامه داشت و همچنین معافیت‌های پرداخت قبوض در آن دوره‌ی زمانی از جمله قبض آب تاثیر به‌سزایی در تغییر الگوی مصرف خانگی داشته و اثرات مخرب آن بر مصرف آب مشهود است. علاوه بر این، با استفاده از راه‌کار پیشنهادی و سری زمانی ساخته شده می‌توان میزان مصرف هفتگی و ماهیانه را نیز به‌دست آورده و برای ماه‌های پرمصرف سال مانند تابستان برنامه‌ریزی قابل اعتمادی انجام داد. همچنین متوجه رقم‌های نامتعارف در قرائت کنتور آب برخی از مشترکین شدیم به طوری که مقدار ثبت شده بسیار زیاد بوده و در برخی از بازه‌ها و تاریخ‌ها مقدار مصرف کل صفر محاسبه شده بود.

۴ نتیجه‌گیری و مطالعات آتی

پرسش اصلی این بود که چگونه می‌توان به بالابردن ضریب اطمینان تحلیل داده‌های قرائت شده از کنتور آب مشترکین شرکت آبفا که در بازه‌های زمانی نامنظم و در زمان‌های پراکنده انجام شده است، کمک کرد؟ برای پاسخ، راهکار محاسبه مصرف میانگین روزانه و الگوریتم ساخت یک سری زمانی با تقریب مناسب پیشنهاد گردید. نتایج حاصل از این الگوریتم نشان داد می‌توان برای سال، ماه و هفته‌های پرمصرف پیش‌بینی و برنامه‌ریزی نمود. برای مثال نیز نمودار مصرف سالیانه از سال ۱۳۹۶ تا ۱۴۰۱ را در این شهرستان آورده و نشان دادیم افزایش بی‌رویه مصرف در کدام بازه زمانی بوده است. پیشنهاد می‌شود در مطالعات آتی به بررسی علل تغییرات نامتعارف در قرائت کنتورهای آب پرداخته شود و همچنین میزان آب بدون درآمد محاسبه گردد.

مراجع

- [۱] محمد پوراسحاق، عزیزاله مبینی و مهدی پوراسحاق. (۱۳۹۶). ارزیابی دقت کنتورهای آب خانگی و تأثیر آن در میزان آب بدون درآمد ۱۳ شهر تابعه شرکت آب و فاضلاب خراسان رضوی. اولین همایش ملی مدیریت مصرف و هدررفت آب.
- [۲] دفتر مدیریت مصرف و کاهش آب بدون درآمد. (۱۳۸۷). راهنمای بالانسینگ سیستم تولید و توزیع آب، شرکت مهندسی آب و فاضلاب کشور.
- [۳] عباس دهقان بهرغانی و محمد رضا فیلی زاده. مدیریت دانش در شناسایی الگوی مصرف آب با کمک داده کاوی (مطالعه موردی: شهر فسا). شرکت آب و فاضلاب استان فارس. <https://www.abfa-fars.ir/sites/default/files/uploads/pdf/modi.pdf>
- [۴] ناصر مهرداد، فرهاد جلالی امین و علی حق الهی. (۱۳۸۷). بررسی آب بحساب نیامده ناشی از عدم دقت کنتورهای مشترکین. مجله محیط شناسی. شماره ۴. صفحات ۱۳ تا ۲۰.



افزایش قابلیت اعتماد با اعمال روش کاهش روی دو مولفه‌ی سیستم

ملائی‌نژاد، ع ۱ و چهکندی، م ۲

۱،۲ گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند

چکیده

افزایش قابلیت اعتماد سیستم‌های مهندسی همواره مورد توجه بوده است. افزونگی و کاهش دو روش اصلی برای افزایش قابلیت اعتماد هستند. در روش کاهش با کاهش نرخ شکست زیر مجموعه‌ای از مولفه‌های سیستم، قابلیت اعتماد سیستم بهبود می‌یابد. در این مقاله به کمک مفهوم معیار اهمیت قابلیت اعتماد توام، شکل بسته‌ای برای ضریب کاهش نرخ شکست همزمان دو مولفه وقتی مولفه‌های سیستم مستقل و هم‌توزیعند به دست می‌آید. نتایج حاصل، حالت خاصی که تنها کاهش روی یک مولفه مقدور است را نیز شامل می‌شود. تعمیم نتایج برای حالتی که ضرایب کاهش متفاوتند و مولفه‌های سیستم هم‌توزیع نباشند می‌تواند در آینده مورد بررسی قرار گیرد.

کلمات کلیدی: روش کاهش، تجزیه محوری، معیار اهمیت قابلیت اعتماد حاشیه‌ای و توام سیستم

۱ پیش‌گفتار

هر سیستم مجموعه‌ای از اجزا است که برای هدفی معین طراحی شده و لزوماً همه‌ی اجزای سیستم، اهمیت یکسانی برای کارایی آن ندارند. لذا یکی از اهداف تحلیل قابلیت اعتماد شناسایی اجزایی است که بیشترین اهمیت را برای بهبود سیستم یا بیشترین بحران را برای شکست آن ایجاد می‌کنند. بیرن‌بام [۲] بر مبنای ساختار سیستم و قابلیت اعتماد اجزا، اولین اندازه اهمیت را برحسب احتمال بحرانی بودن یک جزء در سیستم‌های منسجم معرفی نمود. این اندازه اهمیت به اندازه اهمیت بیرن‌بام یا اندازه اهمیت حاشیه‌ای معروف است. هانگ و لی [۳] اندازه اهمیت بیرن‌بام را توسعه داده و مفهوم اندازه اهمیت توام را برای دو جزء در یک سیستم با اجزای مستقل تعریف کردند.

^۱ atefeh.molaienezhad@birjand.ac.ir

^۲ mchahkandi@birjand.ac.ir

از اندازه اهمیت قابلیت اعتماد حاشیه‌ای بیرن‌بام می‌توان برای شناسایی مؤلفه‌ای که بهبود آن بیشترین بهبود را در قابلیت اعتماد سیستم در پی دارد، استفاده کرد.

بهبود تابع قابلیت اعتماد سیستم را می‌توان به دو روش اساسی کاهش و افزونگی انجام داد. در روش کاهش، قابلیت اعتماد سیستم از طریق جایگزین کردن مولفه‌های اصلی سیستم با مولفه‌های با کیفیت بالاتر یا به عبارتی با کاهش نرخ شکست زیرمجموعه‌ای از مولفه‌ها با اعمال ضریب $\rho \in (0, 1)$ در نرخ شکست‌شان، بهبود می‌یابد. این مفهوم نخستین بار توسط راد در مقالات [۴] و [۵] معرفی شد. وی براساس معیارهای میانگین طول عمر و تابع بقا عوامل هم‌ارزی برای سیستم‌های یک و دو مولفه‌ای سری و موازی را مورد مطالعه قرار داد. محاسبه‌ی عوامل هم‌ارزی برای سیستم‌های پیچیده‌تر از جمله سیستم‌های سری-موازی، موازی-سری و سیستم پل نیز به ترتیب توسط [۶] و [۷] مورد توجه قرار گرفت. در روش افزونگی، با افزودن مولفه‌های اضافی به سیستم اصلی، قابلیت اعتماد سیستم افزایش می‌یابد. افزونگی می‌تواند به صورت فعال یا آماده‌به‌کار باشد. برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد افزونگی فعال و آماده‌به‌کار به [۸]، [۹]، [۱۰] و [۱۱] مراجعه شود. در روش افزونگی با محدودیت‌هایی از جمله فضا و هزینه خرید مولفه‌های اضافی روبرو هستیم، لذا در این مقاله به جزئیات بیشتر در ارتباط با روش کاهش پرداخته می‌شود. چهرکندی و همکاران [۱] با فرض اینکه روش کاهش تنها بر روی یک مولفه از یک سیستم منسجم دلخواه صورت پذیرد، فرمول بسته‌ای برای عامل هم‌ارزی بر اساس معیار تابع قابلیت اعتماد ارائه دادند. آنها نشان دادند معیار اهمیت بیرن‌بام نقش مهمی در اتخاذ مولفه مناسب برای اعمال روش کاهش بازی می‌کند. در این مقاله نتایج [۱] را به حالتی که کاهش بصورت همزمان روی دو مولفه سیستم اعمال می‌شود تعمیم می‌دهیم. برای این منظور به مفاهیم اهمیت قابلیت اعتماد حاشیه‌ای^۱ و اهمیت قابلیت اعتماد توام^۲ نیازمندیم که در ادامه به معرفی آن‌ها خواهیم پرداخت.

بیرن‌بام (۱۹۶۹) معیار اهمیت قابلیت اعتماد حاشیه‌ای مؤلفه i ام را به صورت

$$MRI(i) = \frac{\partial h(\mathbf{p})}{\partial p_i} = h(1_i, \mathbf{p}) - h(0_i, \mathbf{p}),$$

معرفی نمود، که در آن

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n),$$

$$(1_i, \mathbf{p}) = (p_1, \dots, p_{i-1}, 1, p_{i+1}, \dots, p_n),$$

$$(0_i, \mathbf{p}) = (p_1, \dots, p_{i-1}, 0, p_{i+1}, \dots, p_n),$$

و $h(\cdot)$ تابع قابلیت اعتماد سیستم مورد نظر است. اهمیت قابلیت اعتماد حاشیه‌ای درباره چگونگی اثر متقابل مؤلفه‌ها در قابلیت اعتماد سیستم اطلاعی نمی‌دهد. برای رفع این مشکل [۳] مفهوم اهمیت قابلیت اعتماد توام دو مؤلفه‌ی i و j را به صورت

$$JRI(i, j) = \frac{\partial^2 h(\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial MRI(i)}{\partial p_j},$$

تعریف کرد که در آن p_i و p_j به ترتیب قابلیت اعتماد مولفه‌های i و j هستند. از طرفی به کمک قضیه‌ی تجزیه محوری، تابع قابلیت اعتماد یک سیستم منسجم متشکل از n مولفه مستقل به صورت

$$h(\mathbf{p}) = p_i p_j h(1_i, 1_j, \mathbf{p}^{ij}) + (1 - p_i)(1 - p_j) h(0_i, 0_j, \mathbf{p}^{ij}) + (1 - p_i) p_j h(0_i, 1_j, \mathbf{p}^{ij}) + p_i (1 - p_j) h(1_i, 0_j, \mathbf{p}^{ij}), \quad (1)$$

^۱ Marginal Reliability Importance (MRI)

^۲ Joint Reliability Importance (JRI)

بیان می‌شود. لذا اهمیت قابلیت اعتماد توام دو مولفه عبارت است از

$$JRI(i, j) = h(\lambda_i, \lambda_j, \mathbf{p}^{ij}) - h(\lambda_i, \cdot_j, \mathbf{p}^{ij}) - h(\cdot_i, \lambda_j, \mathbf{p}^{ij}) + h(\cdot_i, \cdot_j, \mathbf{p}^{ij}) \quad (2)$$

که در آن $\mathbf{p}^{ij} = (p_1, \dots, p_{i-1}, \cdot, p_{i+1}, \dots, p_{j-1}, \cdot, p_{j+1}, \dots, p_n)$.

معیار اهمیت توام می‌تواند به عنوان تغییر اهمیت قابلیت اعتماد بیرنجام مولفه‌ی i ناشی از بدتر شدن مولفه‌ی j از وضعیت فعال به وضعیت غیر فعال تفسیر شود. اگر $MRI(j, \lambda_i)$ را اهمیت قابلیت اعتماد حاشیه‌ای مولفه j در سیستمی که مولفه i آن در حال کار کردن است و $MRI(j, \cdot_i)$ را اهمیت قابلیت اعتماد حاشیه‌ای مولفه j در سیستمی که مولفه i آن از کار افتاده است در نظر بگیریم، آنگاه

$$\begin{aligned} MRI(j, \lambda_i) &= h(\lambda_i, \lambda_j, \mathbf{p}^{ij}) - h(\lambda_i, \cdot_j, \mathbf{p}^{ij}), \\ MRI(j, \cdot_i) &= h(\cdot_i, \lambda_j, \mathbf{p}^{ij}) - h(\cdot_i, \cdot_j, \mathbf{p}^{ij}), \end{aligned} \quad (3)$$

و داریم

$$JRI(i, j) = MRI(j, \lambda_i) - MRI(j, \cdot_i),$$

$$JRI(i, j) = MRI(i, \lambda_j) - MRI(i, \cdot_j).$$

در ادامه به کمک مفهوم معیار اهمیت قابلیت اعتماد توام به مطالعه چگونگی اعمال روش کاهش روی دو مولفه پرداخته می‌شود. در حالتی که مولفه‌های سیستم مستقل و هم‌توزیعند شکل بسته‌ای برای مقدار ضریب کاهش به دست می‌آید که با توجه به هزینه اعمال روش کاهش روی مولفه‌های سیستم، در یافتن مجموعه مناسب برای اعمال این روش راهگشا خواهد بود.

۲ نتایج اصلی

شن و زی (۱۹۸۹) نشان دادند که میزان افزایش در قابلیت اعتماد یک سیستم وقتی تنها نرخ شکست یک مولفه‌ی سیستم را کاهش دهیم را می‌توان بر اساس میزان اهمیت بیرنجام و میزان بهبود آن مولفه بیان نمود. یعنی:

$$h(p'_i, \mathbf{p}^i) - h(p_i, \mathbf{p}^i) = (p'_i - p_i)MRI(i).$$

در قضیه‌ی بعد این نتیجه را بر اساس معیار اهمیت توام مولفه‌های i و j وقتی طول عمر مولفه‌های سیستم مستقل‌اند تعمیم می‌دهیم.

قضیه ۱.۲. برای یک سیستم منسجم n مولفه‌ای که کارکرد مولفه‌هایش مستقل از هم هستند، میزان افزایش در قابلیت اعتماد آن وقتی مولفه‌های i و j بهبود داده شود عبارت است از:

$$\begin{aligned} h(p'_i, p'_j, \mathbf{p}^{ij}) - h(\mathbf{p}) &= (p'_i p'_j - p_i p_j)JRI(i, j) + (p'_i - p_i)MRI(i, \cdot_j) \\ &+ (p'_j - p_j)MRI(j, \cdot_i). \end{aligned} \quad (4)$$

برهان. فرض کنید نرخ خطر مولفه‌های i و j به ترتیب برابر $r_i(t)$ و $r_j(t)$ باشند. حال اگر به روش کاهش توسط ضرایب ρ_i و ρ_j که مقادیری بین صفر و یک هستند، نرخ خطر مولفه‌های i و j سیستم کاهش یابد، (یعنی

تابع نرخ شکست، به $p'_i = p_i^{\rho_i}$ و $p'_j = p_j^{\rho_j}$ افزایش می‌یابند. در این صورت تابع قابلیت اعتماد سیستم بهبود یافته با اعمال روش کاهش روی مولفه های i و j را با نماد $h(p'_i, p'_j, \mathbf{p}^{ij})$ نمایش می‌دهیم که به شکل

$$h(p'_i, p'_j, \mathbf{p}^{ij}) = p'_i p'_j h(\mathbf{1}_i, \mathbf{1}_j, \mathbf{p}^{ij}) + (1 - p'_i)(1 - p'_j)h(\cdot_i, \cdot_j, \mathbf{p}^{ij}) \\ + (1 - p'_i)p'_j h(\cdot_i, \mathbf{1}_j, \mathbf{p}^{ij}) + p'_i(1 - p'_j)h(\mathbf{1}_i, \cdot_j, \mathbf{p}^{ij}),$$

بیان می‌شود. با تفاضل گیری از رابطه‌ی فوق و رابطه‌ی (۱) و انجام محاسبات جبری ساده اثبات کامل می‌شود. □

لم ۱۰۲. اگر بهبود تنها روی یک مولفه‌ی سیستم مثلاً مولفه i ام صورت پذیرد داریم:

$$h(p'_i, \mathbf{p}^i) - h(\mathbf{p}) = (p'_i - p_i)[p_j JRI(i, j) + MRI(i, \cdot_j)] = (p'_i - p_i)MRI(i).$$

برهان. فرض کنید روش کاهش تنها روی مولفه i ام سیستم اعمال گردد، در این صورت

$$h(p'_i, \mathbf{p}) - h(\mathbf{p}) = (p'_i - p_i)(p_j JRI(i, j) + MRI(i, \cdot_j)). \quad (۵)$$

از طرفی

$$MRI(i) = h(\mathbf{1}_i, \mathbf{p}) - h(\cdot_i, \mathbf{p}) \\ = p_j h(\mathbf{1}_i, \mathbf{1}_j, \mathbf{p}^{ij}) + (1 - p_j)h(\mathbf{1}_i, \cdot_j, \mathbf{p}^{ij}) - p_j h(\cdot_i, \mathbf{1}_j, \mathbf{p}^{ij}) \\ - (1 - p_j)h(\cdot_i, \cdot_j, \mathbf{p}^{ij}) \\ = p_j JRI(i, j) + MRI(i, \cdot_j) \quad (۶)$$

با جایگذاری (۶) در رابطه‌ی (۵) اثبات کامل می‌شود. □

چهارمندی و همکاران [۱] نشان دادند در صورتیکه روش کاهش تنها روی یک مولفه اعمال شود و مولفه‌ها هم توزیع باشند آنگاه مولفه‌ای که دارای اهمیت بیرنجام بالاتری است در اولویت قرار دارد.

لم ۲۰۲. اگر مولفه‌های i و j نسبت به سایر مولفه‌های سیستم سری باشند و بخواهیم با اعمال روش کاهش روی مولفه‌های i و j با ضریب ثابت $\rho \in [0, 1]$ قابلیت اعتماد سیستم را از $h(\mathbf{p})$ به مقدار $h(\mathbf{1}_i, \mathbf{1}_j, \mathbf{p}^{ij}) < \alpha < h(\mathbf{p})$ برسانیم. آنگاه ضریب کاهش از رابطه‌ی

$$\rho = \frac{\ln \left[\frac{\alpha - h(\mathbf{p})}{h(\mathbf{1}_i, \mathbf{1}_j, \mathbf{p}^{ij})} \right] + p_i p_j}{\ln p_i + \ln p_j}, \quad (۷)$$

به دست می‌آید.

برهان. با توجه به رابطه‌ی (۴) و سری بودن مولفه‌های i و j نسبت به سایر مولفه‌های سیستم، داریم:

$$h(p'_i, p'_j, \mathbf{p}^{ij}) - h(\mathbf{p}) = (p_i^\rho p_j^\rho - p_i p_j) JRI(i, j) = ((p_i p_j)^\rho - p_i p_j) h(\mathbf{1}_i, \mathbf{1}_j, \mathbf{p}^{ij})$$

$$\alpha = ((p_i p_j)^\rho - p_i p_j) h(\lambda_i, \lambda_j, \mathbf{p}^{ij}) + h(\mathbf{p})$$

$$(p_i p_j)^\rho - p_i p_j = \frac{\alpha - h(\mathbf{p})}{h(\lambda_i, \lambda_j, \mathbf{p}^{ij})}$$

$$\rho = \frac{\ln \left[\frac{\alpha - h(\mathbf{p})}{h(\lambda_i, \lambda_j, \mathbf{p}^{ij})} + p_i p_j \right]}{\ln p_i + \ln p_j}$$

□

حال فرض کنید اطلاعاتی از قابلیت اعتماد مولفه‌های سیستم در دسترس نباشد بردار \mathbf{p} را به صورت $\mathbf{p} = (\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}, \dots, \frac{1}{\gamma})$ در نظر می‌گیریم، که با توجه به رابطه‌ی (۱) تابع قابلیت اعتماد سیستم به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$h(\mathbf{p}) = \frac{1}{\gamma} h(\cdot_i, \lambda_j, \mathbf{p}^{ij}) + \frac{1}{\gamma} h(\lambda_i, \cdot_j, \mathbf{p}^{ij}) + \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 JRI(i, j). \quad (8)$$

از طرفی $p'_i = p_i^{\rho_i} = (\frac{1}{\gamma})^{\rho_i}$ ، $p'_j = p_j^{\rho_j} = (\frac{1}{\gamma})^{\rho_j}$ و در نتیجه داریم:

$$h(p'_i, p'_j, \mathbf{p}^{ij}) = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\rho_i} \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\rho_j} h(\lambda_i, \lambda_j, \mathbf{p}^{ij}) + (1 - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\rho_i}) (1 - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\rho_j}) h(\cdot_i, \cdot_j, \mathbf{p}^{ij}) \quad (9)$$

$$+ (1 - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\rho_i}) \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\rho_j} h(\cdot_i, \lambda_j, \mathbf{p}^{ij}) + \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\rho_i} (1 - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\rho_j}) h(\lambda_i, \cdot_j, \mathbf{p}^{ij}).$$

در صورتی که مقادیر ضریب کاهش را برابر قرار دهیم، یعنی $\rho_i = \rho_j = \rho$ می‌توان رابطه‌ی فوق را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$h(p'_i, p'_j, \mathbf{p}^{ij}) = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\rho} JRI(i, j) + h(\cdot_i, \cdot_j, \mathbf{p}^{ij})$$

$$+ \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\rho} [-2h(\cdot_i, \cdot_j, \mathbf{p}^{ij}) + h(\cdot_i, \lambda_j, \mathbf{p}^{ij}) + h(\lambda_i, \cdot_j, \mathbf{p}^{ij})] \quad (10)$$

حال اگر بخواهیم قابلیت اعتماد سیستم را به مقدار α افزایش دهیم، پس از انجام محاسبات جبری می‌توان نشان داد ضریب کاهش نرخ خطر در صورت وجود از رابطه‌ی

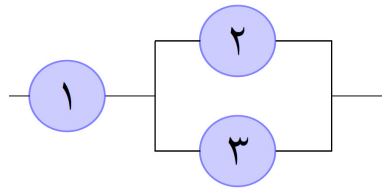
$$\rho = \frac{-1}{\ln \gamma} \times \ln \left(\frac{-(MRI(i) + MRI(j)) \pm \sqrt{\Delta}}{2JRI(i, j)} + \frac{1}{\gamma} \right), \quad (11)$$

به دست می‌آید، که در آن

$$\Delta = (MRI(i) + MRI(j))^2 - 4JRI(i, j)(\alpha - h(\mathbf{p})).$$

همانطور که از رابطه‌ی (۱۱) پیداست، علامت $JRI(i, j)$ نقش مهمی در وجود ρ بازی می‌کند. به عنوان مثال اگر اهمیت قابلیت اعتماد حاشیه‌ای مولفه j ام (i ام) در زمان خرابی مولفه i ام (j ام) بیشتر از زمانی باشد که مولفه i ام (j ام) در حال کار کردن است آن‌گاه $JRI(i, j) < 0$ است. مثال بعد برای روشن‌تر شدن مطلب ارائه شده است.

مثال ۱۰۲. یک سیستم سه مولفه‌ای با ساختار شکل ۱ که مشهور به سیستم رادار هواپیما است را در نظر بگیرید. تابع قابلیت اعتماد این سیستم با فرض $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ به صورت $h(\mathbf{p}) = p_1(p_2 + p_3 - p_2 p_3)$ است. به راحتی می‌توان نشان داد $JRI(1, 2) = 1 - p_3$ ، $JRI(1, 3) = 1 - p_2$ و $JRI(2, 3) = -p_1$. برای معیار اهمیت بیرنجام



شکل ۱: سیستم رادار هواپیما

مولفه‌ها نیز داریم $MRI(1) = p_2 + p_3 - p_2 p_3$ ، $MRI(2) = p_1 - p_1 p_3$ و $MRI(3) = p_1 - p_1 p_2$. حال فرض کنید بخواهیم با کاهش نرخ شکست مولفه‌های شماره‌ی ۱ و ۲ سیستم، قابلیت اعتماد سیستم را افزایش دهیم. برای سادگی کار فرض کنید مولفه‌ها مستقل و هم‌توزیع و با قابلیت اعتماد یکسان p باشند. در این صورت با استفاده از رابطه‌ی (۴) با فرض اینکه کاهش یکسان روی مولفه‌ها با ضریب ρ انجام شود، کافی است معادله‌ی (۱۲) را بر حسب ρ حل کنیم.

$$(p^\rho - p)^\alpha (1 - p) + (p^\rho - p)(3p - 2p^2) - (\alpha - h(p)) = 0. \quad (12)$$

پس از محاسبات جبری ساده داریم:

$$\rho = \frac{1}{\ln(p)} \ln\left(\frac{-3p + 2p^2 + \sqrt{\Delta}}{2(1-p)} + p\right),$$

که در آن $\Delta = (3p - 2p^2)^2 + 4(1-p)(\alpha - h(p))$. به ازای $p = \frac{1}{4}$ ، قابلیت اعتماد سیستم مقدار $h(p) = \frac{3}{8}$ خواهد بود. چنانچه بخواهیم با اعمال روش کاهش روی دو مولفه‌ی سیستم، قابلیت اعتماد را افزایش و به مقدار $\alpha = \frac{5}{8}$ برسانیم، در این حالت مجموعه مناسب برای کاهش کدام دو مولفه است؟ اگر روش کاهش روی مولفه‌های شماره ۱ و ۲ انجام شود، مقدار ضریب کاهش برابر است با $\rho_{\{1,2\}} = \frac{-\ln(-\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4}})}{\ln \frac{1}{4}} = 0.46$. به راحتی می‌توان بررسی نمود که اهمیت قابلیت اعتماد حاشیه‌ای مولفه‌های شماره ۲ و ۳ با هم و اهمیت قابلیت اعتماد توام $JRI(1, 2)$ و $JRI(1, 3)$ نیز با هم برابر است. بنابراین همانطور که انتظار می‌رود $\rho_{\{1,2\}}$ و $\rho_{\{1,3\}}$ نیز با هم برابر می‌شوند. پس از انجام محاسبات مشابه، ملاحظه می‌شود که با اعمال روش کاهش به طور همزمان روی مولفه‌های شماره ۲ و ۳ نمی‌توان قابلیت اعتماد سیستم را به مقدار مورد نظر رساند، یعنی جوابی برای ρ وجود ندارد. بنابراین برای اعمال روش کاهش روی دو مولفه وقتی قابلیت اعتماد مولفه‌ها با هم برابر است، تفاوتی بین دو مجموعه $\{1, 2\}$ و $\{1, 3\}$ وجود ندارد. چنانچه بخواهیم با اعمال روش کاهش تنها روی یک مولفه به این قابلیت اعتماد برسیم، ضریب کاهش برای مولفه شماره ۱ عبارت است از $\rho_{\{1\}} = -\frac{\ln(\frac{5/8 - p}{1-p})}{\ln \frac{1}{4}} = 0.26$ و برای مولفه شماره ۲ نمی‌توان مقداری از ρ را یافت که به ازای آن بتوان قابلیت اعتماد سیستم را به مقدار $\alpha = \frac{5}{8}$ رساند. همانطور که ملاحظه می‌کنیم ضریب وقتی کاهش روی دو مولفه اعمال می‌شود بزرگتر از زمانی است که تنها بخواهیم نرخ خطر یک مولفه را کاهش دهیم. با در نظر گرفتن تابع هزینه برای کاهش نرخ شکست مولفه‌های سیستم می‌توان تصمیم درست برای انتخاب زیر مجموعه مناسب برای اعمال روش کاهش را اتخاذ نمود.

چپ‌کنندی و همکاران [۱] به بحث درباره‌ی اعمال روش کاهش روی یک مولفه از سیستم به منظور اینکه قابلیت اعتماد سیستم هم‌ارز با اعمال یکی از روش‌های افزونگی روی مولفه مورد نظر شود، پرداختند. آنها به کمک این روش، معیار جدیدی از اهمیت مولفه‌های سیستم به منظور اعمال روش کاهش معرفی نمودند. همانطور که از مثال ۱.۲ و نتایج [۱] برمی‌آید، گاهی تنها با کاهش نرخ شکست یک مولفه نمی‌توان قابلیت اعتماد سیستم را به میزان

مورد نظر بهبود داد و ناچار به استفاده از یک زیرمجموعه با تعداد بیش از دو مولفه هستیم. این مقاله به تعمیم نتایج [۱] به کمک معیار اهمیت توام پرداخت. در آینده می‌توان با کمک نتایج این مقاله معیار اهمیت توام جدیدی برای اعمال روش کاهش معرفی نمود و حتی به تعمیم نتایج برای موقعیتی که مولفه‌های سیستم وابسته‌اند پرداخت.

مراجع

- [۱] م. چهکندی، ج. اطمینان و م. خنجری صادق. (۱۴۰۰)، *مطالعه‌ای بر هم‌ارزی قابلیت اعتماد در روشهای کاهش و افزونگی*، مجله علوم آماری ایران ۶۱-۸۰.
- [2] Birnbaum Z. W. (1969), *On the Importance of Different Components in a Multicomponent System*, In *Multivariate Analysis II* (Edited by P. R. Krishnaiah). 581–592, Academic Press, New York.
- [3] Hong, J. S., Lie, C. H. (1993), *Joint Reliability-Importance of Two Edges in an Undirected Network*, IEEE Transactions on Reliability. 42(1), 17–23.
- [4] Råde, L. (1993a), *Reliability Equivalence*, Microelectronics Reliability. 33, 323–325.
- [5] Råde, L. (1993b), *Reliability Survival Equivalence*, Microelectronics Reliability. 33, 881–894.
- [6] Sarhan, A. M. (2002), *Reliability Equivalence with a Basic Series/Parallel System*, Applied Mathematics and Computation. 132, 115–133.
- [7] Sarhan, A., Tadj, L., Al-Khedhairi, A. and Mustafa, A. (2008), *Equivalence Factors of a Parallel-Series System*, Applied Sciences. 10, 219–230.
- [8] Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Rinehart and Winston, New York.
- [9] Eryilmaz, S. and Erkan, E. (2018), *Coherent System with Standby Components*, Applied Stochastic Models in Business and Industry. 34, 395–406.
- [10] Nanda, A. K. and Hazra, N. K. (2013), *Some Results on Active Redundancy at Component Level versus System Level*, Operations Research Letters. 41, 241–245.
- [11] Jeddi, H. and Doostparast, M. (2022), *Allocation of Redundancies in Systems: A General Dependency-Base Framework*, Annals of Operations Research. 312, 259–273.
- [12] Shen, K. and Xi, M. (1989), *The Increase of Reliability of k -out-of- n Systems through Improving a Component*, Reliability Engineering and System Safety. 26, 189–195.



ارائه‌ی روش زنجیره‌ی مارکوف برای محاسبه‌ی قابلیت دسترسی سیستمی با قطعات افزوده و ساختار موازی تحت استراتژی مختلط

نجفی جویباری، م^۱ ، زینل همدانی، ع^۲ و ابویی اردکان، م^۳

^{۱،۲} دانشکده مهندسی صنایع و سیستمها، دانشگاه صنعتی اصفهان

^۳ گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی، دانشگاه خوارزمی

چکیده

یکی از راههای متداول در امر افزایش قابلیت اعتماد سیستم‌های حیاتی، استفاده از قطعات افزوده در سیستم می‌باشد که آنها را طبق استراتژی‌های خاصی فعال می‌کنند. برای تمام استراتژی‌ها، مهمترین ویژگی، در دسترس بودن سیستم در حین خدمت‌رسانی میباشد، به گونه‌ای که در زمان نیاز بتوان از خدمات مطلوب سیستم بهره برد. یکی از قویترین استراتژیهای معرفی شده در امر افزایش قابلیت اعتماد، استراتژی مختلط میباشد که تاکنون اکثرا در سیستمهای غیرقابل تعمیر مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مقاله، این استراتژی را در سیستمهای تعمیرپذیر مورد بررسی قرار خواهیم داد. با توجه به این نکته که افزایش امکان خدمت‌رسانی همیشگی سیستم ممکن است باعث افزایش هزینه‌ها شود، یکی از ایده‌های کارا در جهت کاهش اتلاف منابع با ارزشی همچون زمان و بودجه، استفاده از مفهوم مرخصی در سیستم میباشد. این مفهوم در سیستمهای تعمیرپذیری که از تعمیرکار/سرور بهره میبرند، کاربرد دارد. در این مقاله، قصد داریم مدل مناسبی برای استراتژی مختلط در سیستمهای تعمیرپذیر با قطعات یکسان و سیاستهای متنوع مرخصی ارائه دهیم. به همین منظور، برای شبیه‌سازی سیستم از دیدگاه تئوری صف استفاده میشود و از مدل مارکوف برای محاسبه‌ی رابطه‌ی ریاضی شاخص دسترس‌پذیری نسبت به زمان بهره می‌بریم.

کلمات کلیدی: قابلیت دسترسی، سیستم تعمیر پذیر، قطعات افزوده، استراتژی مختلط، زنجیره‌ی مارکوف

^۱mnajafjuy@in.iut.ac.ir

^۲hamadani@cc.iut.ac.ir

^۳abouei@khu.ac.ir

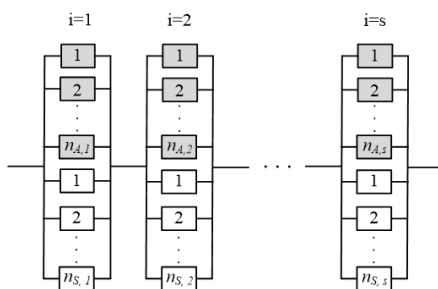
۱ پیش‌گفتار

در دنیای مبتنی بر تکنولوژی، تقریباً تمام افراد به کارکرد صحیح مجموعه‌ی گسترده‌ای از سیستم‌های ماشینی و محاسبات پیچیده‌ی آن وابسته هستند. این وابستگی در حوزه‌های سلامت، امنیت، حمل و نقل و ارتباطات، بیش از سایر جنبه‌های رفاهی ظاهر می‌شود. کاربران انتظار دارند سیستم‌های پایش سلامت در بیمارستان، دستگاه‌های تولید و توزیع برق، سیستم‌های هیدرولیک موجود در هواپیما و آنتن‌های مخابراتی، در زمان مورد نیاز، به خوبی وظیفه‌ی خود را انجام دهند. در غیر اینصورت، نتایج معیوب شدن آن‌ها می‌تواند باعث مختل شدن بخشی از زندگی روزمره شده و یا باعث بروز یک فاجعه شود. همانطور که جامعه‌ی مبتنی بر عصر اطلاعات در پیچیده‌تر شدن سیستم‌ها پیش می‌رود، چالش‌های جدیدی نیز در مباحث مبتنی بر قابلیت اطمینان به وجود می‌آورند [۱]. علم قابلیت اطمینان می‌تواند در جهت درک این پیچیدگی‌ها و یافتن پاسخ چالش‌ها به مهندسان کمک کند. قابلیت اعتماد یک موجود (قطعه) برابر است با احتمال اینکه موجود در مدت زمان معین در شرایط مشخص از انجام کار معین باز نماند [۲]. همینطور، قابلیت دسترسی یک موجود برابر است با احتمال اینکه موجود در لحظه‌ای مشخص برای انجام کار معین در شرایط معلوم در دسترس باشد [۳]. یکی از اساسی‌ترین تفاوت‌های بین این دو شاخص این است که مفهوم قابلیت اعتماد برای قطعات غیر قابل تعمیر تعریف می‌شود، در حالی که برای قطعات تعمیرپذیر از مفهوم قابلیت دسترسی استفاده می‌شود. بطور کلی، مفهوم قابلیت اعتماد به عنوان زیرمجموعه‌ی مفهوم قابلیت دسترسی مطرح شده است، به گونه‌ای که برای قطعات تعمیرپذیر از لحظه صفر تا وقوع اولین خرابی، می‌توان از مفهوم قابلیت اعتماد استفاده کرد، ولی بعد از تعمیر، مفهوم قابلیت دسترسی جایگزین آن می‌شود.

۱.۱ استراتژی مختلط

استراتژی مختلط به عنوان ترکیب دو استراتژی فعال و ذخیره توسط اردکان و همدانی [۴] معرفی شد. در این استراتژی، هر سیستمی مانند i می‌تواند تعداد مختلفی از قطعات فعال و ذخیره داشته باشد که به ترتیب با نمادهای n_{si} و n_{Ai} نشان داده می‌شوند. در این مقاله فرض می‌کنیم که قطعات ذخیره از نوع سرد هستند. شکل ۱ استراتژی مختلط را در یک ساختار سری- موازی نشان می‌دهد، به گونه‌ای که قطعات خاکستری، قطعات فعال می‌باشند و قطعات سفید، قطعات ذخیره- سرد هستند. در این استراتژی، ابتدا به تعداد n_{Ai} قطعه به صورت همزمان از لحظه صفر شروع به کار می‌کنند. زمانی اولین قطعه‌ی ذخیره- سرد توسط سوئیچ فعال می‌شود که تمام n_{Ai} قطعه‌ی قبلی معیوب شوند. قطعات بعدی ذخیره- سرد طبق ترتیبی که از قبل مشخص شده است، در مواقع لزوم (خرابی قطعه‌ی فعال) روشن می‌شوند. قابل توجه است که این سیستم می‌تواند با حداقل یک قطعه‌ی سالم، به فعالیت خود ادامه دهد. به دلیل غیرقابل تعمیر بودن قطعات، در زمانی که آخرین قطعه‌ی n_{si} معیوب شود، سیستم نیز متوقف خواهد شد که به اصطلاح گفته می‌شود سیستم دچار شکست شده است. از آنجایی که هر سیستم برای عملکرد خود به حداقل یک قطعه‌ی فعال نیاز دارد، بنابراین $n_{Ai} > 1$ ، و تعداد قطعات ذخیره در هر سیستم می‌تواند هر مقداری داشته باشد یعنی $n_{si} > 0$. در نتیجه، تعداد کل قطعات تخصیص داده شده به سیستم i برابر خواهد بود با $n_i = n_{Ai} + n_{si}$. یکی از نوآوری‌های مقاله، استفاده از قطعات تعمیرپذیر در سیستم می‌باشد. به همین جهت، در حین استفاده از قطعات تعمیرپذیر در مدل پیشنهادی مقاله، زمان‌های تعمیر نیز باید مدنظر قرار بگیرند. در شرایط واقعی، تعیین زمان‌های تعمیر قطعات با مفهوم مرخصی مرتبط خواهند شد. مفهوم مرخصی به معنی در دسترس نبودن تعمیرکار طی یک دوره‌ی زمانی می‌باشد. برای مدلسازی تأثیرات متقابل سیاست‌های مختلف مرخصی بر روی شاخص‌های قابلیت اعتماد و میانگین زمان تا خرابی (MTTF) می‌توان از فرایند مارکوفی بهره گرفت. در ادامه، ابتدا فرایند

مارکوفی توضیح داده خواهد شد و سپس، مفهوم مرخصی معرفی می‌شود.



شکل ۱: استراتژی مختلط در سیستمی با ساختار سری-موازی

۲.۱ فرایند مارکوفی

یکی از روش‌های موجود برای مدل‌سازی سیستم‌هایی که از قطعات با توزیع طول عمر نمایی بهره می‌برند، استفاده از فرایند مارکوفی می‌باشد. این فرایند در مدل‌سازی سیستم‌های همراه با رفتارهای پویا عملکردی مناسب دارد. مراحل ساختن مدل مارکوفی شامل دو بخش شناسایی حالت‌های سیستم و کشف گذار ممکن بین حالت‌ها می‌باشد. نمودار گذار حالت با یک حالت اولیه (که معمولاً در آن تمام قطعات سالم هستند) شروع می‌شود. با گذشت زمان و وقوع خرابی در قطعات، سیستم در حالت‌های مختلف قرار می‌گیرد تا در نهایت به یکی از حالت‌های شکست برسد. بر اساس نمودار گذار حالت، مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیلی $AP(t) = P'(t)$ حاصل می‌شوند که در آن، A ماتریس نرخ گذار حالت، $P(t)$ بردار احتمال حالت سیستم در زمان t ، و $P'(t)$ بردار مشتق شده از احتمال حالت سیستم در زمان t می‌باشد. اگر سیستمی را با n حالت مختلف فرض کنیم، آنگاه معادلات دیفرانسیلی گذار بین حالات را می‌توان به صورت ماتریسی به این شکل نمایش داد.

$$\begin{bmatrix} -a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & -a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & -a_{33} & \dots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & -a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1'(t) \\ P_2'(t) \\ P_3'(t) \\ \vdots \\ P_n'(t) \end{bmatrix}$$

شکل ۲: معادلات دیفرانسیلی گذار بین حالات

۳.۱ مرخصی

در فرایند نگهداری و تعمیرات، در بسیاری از سیستم‌های ماشینی / سرویس‌دهی، تعمیرکار ممکن است به دلایلی همچون کاهش زمان بیکاری و یا استفاده از تعمیرکار برای سرویس‌دهی ثانویه، در دسترس نباشد. در این شرایط با مفهوم مرخصی مواجه می‌شویم که اینگونه معنی می‌شود: زمان تصادفی که تعمیرکار برای یک دوره‌ی زمانی تصادفی در فرایند تعمیرات در دسترس نیست. طول مدت زمان مرخصی تعمیرکار یک مسئله‌ی مهم در سیستم‌های ماشینی می‌باشد. مرخصی‌های طولانی مدت، احتمال فقدان تولید و درآمد ناشی از آن را به دلیل وجود صف‌های طولانی ماشین‌های معیوب افزایش می‌دهد. در حالیکه مرخصی‌های کوتاه مدت، میزان بیکاری تعمیرکار و هزینه‌های ناشی از آن را افزایش می‌دهد. به همین دلیل، تعیین سیاست‌های مطلوب مرخصی برای تعمیرکار باعث ایجاد تعادلی بین کاهش تولید، میزان بیکاری، صف تعمیر و هزینه‌های جانبی خواهد شد. در این مقاله از دو سیاست مرخصی کاری چندگانه و توقف استفاده شده است که در ادامه توضیح داده می‌شوند.

۱.۳.۱ سیاست مرخصی کاری چندگانه

سیاست مرخصی کاری توسط سروی و فین [۵] معرفی شد. در این سیاست، تعمیرکار به جای قطع فرایند تعمیر در دوران مرخصی، با نرخ کمتری به فعالیت می‌پردازد تا زمان تصادفی مرخصی وی به اتمام برسد. در سیاست مرخصی کاری چندگانه، در انتهای دوره‌ی مرخصی، اگر هیچ ماشین معیوبی در سیستم وجود نداشته باشد، آنگاه تعمیرکار، مرخصی کاری به مدت زمان تصادفی را شروع می‌کند. در غیر اینصورت، تعمیرکار با نرخ تعمیر عادی، ماشین معیوب را تعمیر می‌کند.

۲.۳.۱ سیاست توقف مرخصی

براساس این سیاست، اگر تعداد ماشین‌های معیوب منتظر تعمیر بیشتر از یک مقدار از پیش تعیین شده‌ای (T) در زمان مرخصی برسد، آنگاه تعمیرکار مرخصی خود را نیمه‌کاره تمام می‌کند و به سیستم بازمی‌گردد و تعمیرات را با نرخ عادی پی می‌گیرد.

۲ توضیح مدل پیشنهادی

تابع توزیع $phase - type$ ، فرایند ورود مارکوفی و عملگرهای کرونگر نقش مهمی در این مقاله خواهند داشت که به نحو مقتضی معرفی خواهند شد.

تعریف ۱.۲. تابع توزیع زمان تا حالت جذب در یک فرایند مارکوفی با تعداد محدود حالات گذار و یک حالت جذب را می‌توان با توزیع $H(\cdot)$ در بازه‌ی $[0, \infty)$ که یک تابع توزیع $phase - type$ ($PH - distribution$) می‌باشد، نشان داد. با نمایش ماتریس نرخ گذار بین حالات گذار با نماد T ، و بردار سطری احتمال حالت اولیه محدود به حالات گذار با نماد α ، و همچنین بردار ستونی شامل فقط عدد ۱ با نماد e ، تابع توزیع تجمعی $H(\cdot)$ بدین صورت خواهد بود: $H(x) = 1 - \alpha \exp(Tx)e$ ، $x \geq 0$. بدین ترتیب $H(\cdot)$ از تابع توزیع $PH(\alpha, T)$ پیروی می‌کند. بردار جذب T^* از معادله‌ی $-Te = T^* \geq 0$ حاصل می‌شود.

تعریف ۲.۰۲. در این مقاله، از تابع $phase-type$ برای نمایش عملکرد توابع طول عمر قطعات و تعمیر آن‌ها استفاده می‌شود. بر همین اساس، پارامترهای W و α بیانگر ماتریس نرخ گذار و بردار حالت اولیه‌ی توزیع طول عمر یک قطعه، و پارامترهای W_{ac} و α_{ac} نشان‌دهنده‌ی ماتریس نرخ گذار و بردار حالت اولیه‌ی توزیع طول عمر دو قطعه‌ی فعال، و پارامترهای S و $\beta^{(1)}$ به عنوان ماتریس نرخ گذار و بردار حالت اولیه‌ی تعمیر در حالت معمولی می‌باشند. همچنین، از پارامترهای T و $\beta^{(2)}$ برای نمایش ماتریس نرخ گذار و بردار حالت اولیه‌ی تعمیر در حالت مرخصی کاری استفاده شده است.

تعریف ۳.۰۲. ماتریس D را به عنوان ماتریس مولد ساده‌نشده‌ی کوچک فرایند مارکوف قرار می‌دهیم. همچنین، توالی محدود ماتریس‌های $D_k, k \geq 1$ را با عناصر غیر منفی، و ماتریس D را با عناصر غیر منفی خارج از قطر در نظر بگیرید. ابعاد این سه ماتریس یکسان می‌باشد. ماتریس D وارون پذیر بوده و عناصر قطری آن منفی هستند. مجموع ماتریس‌های D_k برابر با ماتریس D می‌باشد. ماتریس D' مربوط به زمان بین ورودهای پی در پی (زمان وقفه) و ماتریس D_k مرتبط با ورود نوع k که $k \geq 1$ می‌باشد.

تعریف ۴.۰۲. در نظریه‌ی صف، فرایند ورود مارکوفی (MAP) در مدل‌سازی زمان بین رخداد اتفاقاها (مثلا زمان بین ورود مشتری‌ها) کاربرد دارد. فرایند پواسون به عنوان یکی از مثال‌های این فرایند می‌باشد که در آن، زمان بین هر رخداد اتفاق (مانند ورود مشتری)، از توزیع نمایی پیروی می‌کند. MAP با دو ماتریس D و D_1 معرفی می‌شود که درایه‌های ماتریس D نماینده‌ی گذار پنهان، و درایه‌های ماتریس D_1 نشان‌دهنده‌ی گذار آشکار هستند. ماتریس بلوک‌بندی شده‌ی Q ، به عنوان ماتریس نرخ گذار در یک MAP می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} D & D_1 & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & D & D_1 & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & D & \dots & \cdot & \cdot \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & D & D_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & D \end{bmatrix}$$

اگر درایه‌های ماتریس فوق را به صورت $D_{\cdot} = -$ و $D_1 = \lambda$ در نظر بگیریم، آنگاه با یک فرایند پواسون مواجه می‌شویم که فقط یک گذار محتمل دارد که با نرخ λ رخ می‌دهد. یکی از شروط مهمی که در تشکیل ماتریس Q در MAP وجود دارد، ایجاد تعادل بین نرخ ورود و خروج می‌باشد، بدین صورت: $(D + D_1)^{-1} = 0$.

تعریف ۵.۰۲. اگر A و B ماتریس‌های مستطیلی با ابعاد به ترتیب $m_1 \times m_2$ و $n_1 \times n_2$ باشند، آنگاه حاصل ضرب کرونگر آن‌ها را با نماد $A \otimes B$ نشان می‌دهیم که دارای ابعاد $m_1 n_1 \times m_2 n_2$ خواهد بود. با استفاده از این عملگر، می‌توان حاصل جمع کرونگر را برای دو ماتریس مربعی C و D با ابعاد به ترتیب k_1 و k_2 به صورت $C \otimes D = C \otimes I_{k_2} + I_{k_1} \otimes D$ تعریف کرد، که I_k یک ماتریس یکبه با بُعد k می‌باشد.

برای اطلاعات بیشتر در زمینه‌ی MAP و توزیع $phase-type$ به توضیحات نویسنده [۶] مراجعه شود.

۱.۰۲ توصیف سیستم

در این قسمت، مفروضات سیستم مدنظر به صورت دقیق شرح داده می‌شود و سپس از دیدگاه روش مارکوفی، عملکرد سیستم در طول زمان، مدل‌سازی می‌گردد.

۱.۱.۲ مفروضات

یک سیستم تعمیرپذیر با سه قطعه‌ی یکسان و استراتژی مختلط به همراه توقف مرخصی و مرخصی کاری در نظر گرفته شده است. مفروضات به شرح زیر می‌باشند:

نکته ۱.۲. نوع تعمیر قطعات به صورت تعمیر کامل می‌باشد. به این صورت که قطعات بعد از تعمیر، مانند یک قطعه‌ی نو شروع به کار می‌کنند. اگر تمام قطعات در حالت مطلوب قرار داشته باشند، آنگاه تعمیرکار به مرخصی خواهد رفت. قانون فراخوانی قطعات به جهت تعمیر آن‌ها به صورت اولین ورودی - اولین خروجی می‌باشد.

نکته ۲.۲. توزیع طول عمر قطعه‌ی در حال کار از توزیع $phase - type$ با تابع $PH(\alpha, W)$ با $m = 1$ فاز گذار پیروی می‌کند که همان توزیع نمایی می‌باشد. نرخ خرابی این قطعه به صورت $W^{(0)} = -W \times e$ محاسبه می‌شود، که بردار e یک بردار ستونی متشکل از عدد یک می‌باشد. بر همین اساس، توزیع طول عمر دو قطعه‌ی فعال به صورت $PH(\alpha_{ac}, W_{ac})$ نشان داده می‌شود که نرخ خرابی این دو قطعه از طریق $W_{ac}^{(0)} = -W_{ac} \times e$ محاسبه می‌شود. تابع توزیع تعمیر قطعات در بازه‌ی تعمیر معمولی از تابع $PH(\beta^{(1)}, S)$ با $n_1 = 2$ فاز گذار تبعیت می‌کند. برای نشان دادن اتمام تعمیر در بازه‌ی تعمیر معمولی از پارامتر $S^{(0)} = -S \times e$ استفاده می‌شود. بعد از تکمیل یک تعمیر، اگر هیچ قطعه‌ی خرابی در سیستم وجود نداشته باشد، آنگاه تعمیرکار مرخصی خود را با پروسه‌ی مارکوفی $MAP(D., D_1)$ با بردار شروع شونده‌ی d با بُعد $k = 2$ آغاز می‌کند. D نشان‌دهنده‌ی ماتریس نرخ گذار قبل از رسیدن به حالت جذب در فرایند مارکوفی می‌باشد، که به منزله‌ی عدم اتمام مرخصی می‌باشد. همچنین، D_1 نشان‌دهنده‌ی چگونگی شروع دوباره‌ی پروسه بعد از تکمیل مرخصی است. در حین بازه‌ی مرخصی کاری، قطعه‌ی معیوب می‌تواند تعمیر شود، که تابع توزیع تعمیر در این حالت از $PH(\beta^{(1)}, T)$ با بُعد n_2 پیروی می‌کند. پارامتر $T^{(0)} = -T \times e$ نشان‌دهنده‌ی اتمام تعمیر در بازه‌ی مرخصی کاری می‌باشد. تمام این زمان‌ها به صورت تصادفی هستند.

۲.۱.۲ مولد کوچک

سیستم مدنظر را می‌توان با استفاده از فرآیند مارکوفی زمان-پیوسته با مجموعه حالات $\Omega = \{S_I, S_{II}, S_{VII}\}$ مدل‌سازی کرد. این مجموعه حالات شامل فازهای مختلف سیستم در یک زمان خاص می‌باشند، که به این صورت تشریح شده‌اند:

- S_I : دو قطعه فعال هستند و قطعه‌ی سوم به صورت ذخیره می‌باشد. تعمیرکار در حالت مرخصی است.
- S_{II} : یک قطعه فعال، یک قطعه در حال تعمیر و قطعه‌ی سوم به صورت ذخیره می‌باشد. تعمیرکار در حال تعمیر قطعه‌ی معیوب در حالت مرخصی کاری می‌باشد.
- S_{III} : یک قطعه فعال، یک قطعه در حال تعمیر و قطعه‌ی سوم به صورت ذخیره می‌باشد. تعمیرکار در حال تعمیر قطعه‌ی معیوب و در حالت تعمیر معمولی می‌باشد.
- S_{IV} : یک قطعه فعال، یک قطعه در حال تعمیر و قطعه‌ی سوم در انتظار تعمیر می‌باشد. تعمیرکار در حال تعمیر قطعه‌ی معیوب و در حالت مرخصی کاری می‌باشد.
- S_V : یک قطعه فعال، یک قطعه در حال تعمیر و قطعه‌ی سوم در انتظار تعمیر می‌باشد. تعمیرکار در حال تعمیر و در حالت تعمیر معمولی می‌باشد.
- S_{VI} : تمام قطعات معیوب شدند و یک قطعه در حال تعمیر و دو قطعه‌ی دیگر در انتظار تعمیر هستند. تعمیرکار در حال تعمیر و در حالت مرخصی کاری می‌باشد.

S_{VII} : تمام قطعات معیوب شدند و یک قطعه در حال تعمیر و دو قطعه‌ی دیگر در انتظار تعمیر هستند. تعمیرکار در حال تعمیر و در حالت تعمیر معمولی می‌باشد.

۳.۱.۲ نحوه‌ی محاسبه‌ی نرخ گذار بین حالات مختلف

ارتباطی که بین حالات مختلف فرایند مارکوفی وجود دارد، به گذار بین حالات موسوم است و توسط بلوک‌های ماتریس مولد کوچک محاسبه می‌شوند. هر بلوک از ماتریس مولد کوچک، نشان‌دهنده‌ی نرخ گذار بین مجموعه حالات می‌باشد، که رابطه‌ی آن در ادامه آمده است.

	S_I	S_{II}	S_{III}	S_{IV}	S_V	S_{VI}	S_{VII}
S_I	$W_{ac} \oplus D_0 + I_{W_{ac}} \otimes D_1$	$W_{ac}^{(0)} \otimes I_{D_0} \otimes \beta^{(2)}$	0	0	0	0	0
S_{II}	$\alpha_{ac} \otimes I_{D_0} \otimes T^{(0)}$	$W \oplus D_0 \oplus T$	$I_W \otimes D_1 e \otimes P$	$W^{(0)} \alpha \otimes I_T \otimes I_{D_0}$	0	0	0
S_{III}	$\alpha_{ac} \otimes S^{(0)} d$	0	$W \oplus S$	0	$W^{(0)} \alpha \otimes I_S$	0	0
S_{IV}	0	0	$I_W \otimes e \otimes T^{(0)} \beta^{(1)}$	$W \oplus D_0 \oplus T$	$I_W \otimes D_1 e \otimes P$	$W^{(0)} \otimes I_T \otimes I_{D_0}$	0
S_V	0	0	$I_W \otimes S^{(0)} \beta^{(1)}$	0	$W \oplus S$	0	$W^{(0)} \otimes I_S$
S_{VI}	0	0	0	0	$\alpha \otimes e \otimes T^{(0)} \beta^{(1)}$	$D_0 \oplus T$	$D_1 e \otimes P$
S_{VII}	0	0	0	0	$\alpha \otimes S^{(0)} \beta^{(1)}$	0	S

شکل ۳: ماتریس نرخ گذار بین حالات

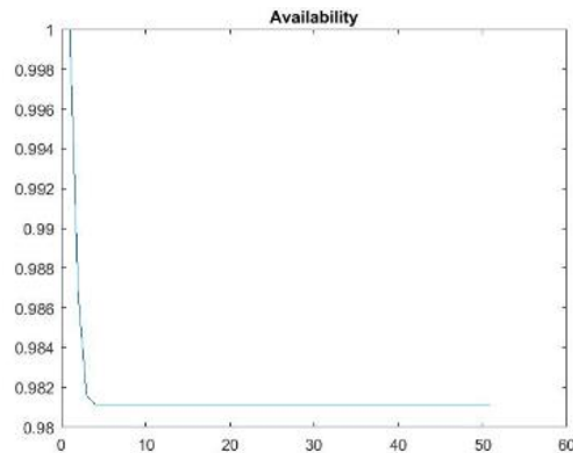
در حالت پویا نسبت به زمان، تابع احتمال گذار به صورت $P(t) = (P_{ab}(t))$ می‌باشد که $P_{ab}(t)$ احتمال گذار از حالت a به حالت b در زمان t می‌باشد. این تابع احتمال براساس تابع *exponentialmatrix* به صورت $P(t) = \exp(Qt)$, $s.t. P(0) = I$ محاسبه می‌شود. بنابراین، هر $P_{ab}(t)$ به ماتریسی اشاره می‌کند که درایه‌های آن برابر با احتمال گذار بین فازهای حالت a و b در زمان t می‌باشد. شاخص قابلیت دسترسی، احتمال عملکرد صحیح سیستم در زمان t را محاسبه می‌کند. در اینجا، سیستم زمانی عملکرد صحیح خود را انجام می‌دهد که در یکی از حالت‌های $\Omega_{operational} = \{S_I, S_{II}, S_{III}, S_{IV}, S_V\}$ باشد. بردار احتمال اولیه‌ی سیستم برابر با $(\alpha \otimes d, \cdot \rightarrow)$ می‌باشد. بنابراین، رابطه‌ی زیر به عنوان شاخص قابلیت دسترسی سیستم در حالت پویا در استراتژی مختلط پیشنهاد می‌گردد.

$$A(t) = (\alpha \otimes d, \cdot \rightarrow) \sum_{b=S_I}^{S_V} P_{S_I b}(t) e \quad (1)$$

۳ مثال عددی

به عنوان انجام آزمایش اولیه جهت ارزیابی ایده‌ی ارائه شده در این مقاله، یک مثال با مشخصات زیر کدنویسی شد و نمودار قابلیت دسترسی آن در شکل ۴ نمایش داده شده است.

مشخصات سیستم: سه قطعه‌ی مشابه با تابع توزیع طول عمر $PH(1, -0.18)$ در نظر گرفته شده است که از استراتژی مختلط برای فعال شدن پیروی می‌کنند. همچنین، تابع توزیع تعمیر در حالت مرخصی معمولی به صورت $PH([1, 0], \begin{bmatrix} -3/5 & 0.5 \\ 1 & -2/5 \end{bmatrix})$ و در حالت مرخصی کاری به صورت $PH([1, 0], \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix})$ فرض شده است. همچنین، از سیاست‌های مرخصی چندگانه، مرخصی کاری و توقف مرخصی بهره برده شده است. علاوه بر این، مرخصی‌ها از پروسه‌ی MAP با پارامترهای $MAP(\begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.45 & 0.05 \\ 0.1 & -0.5 \end{bmatrix})$ و $d = [1, 0]$ تبعیت می‌کنند. زمان ماموریت $t = 50$ units است.



شکل ۴: نمودار قابلیت دسترسی سیستم مختلط با قطعات یکسان

۴ نتیجه گیری

نتیجه‌ی مشخص شده در شکل ۵، نشان از آزمایش موفق محاسبه‌ی قابلیت دسترسی سیستم‌های قطعات افزوده تحت استراتژی مختلط با قطعات یکسان می‌باشد. به عنوان پژوهش‌های آتی، می‌توان مدلسازی این سیستم را با قطعات مختلف انجام داد بر همین اساس، ابتدا باید ماتریس مولد برای سیستم مدنظر با قطعات مختلف طراحی شود، و سپس کدنویسی‌های مربوطه انجام گردد تا بتوان تحلیل جامعی از عملکرد آن بر اساس شاخص‌های RAM که عبارتند از: قابلیت اعتماد، (R) قابلیت دسترسی، (A) و نگهداری و تعمیرات (M) در اختیار داشت.

مراجع

- [1] ham, H., (2015), *Quality and reliability management and its applications*. Springer.
- [2] arlow, R. E. and Proshan, F., (1981) *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Probability Models .
- [3] amadani, A. Z. , (1980), *Availability and reliability modeling*, Engl. Univ. Bradford.

- [4] rdakan M. A. , and Hamadani, A. Z., (2014), *Reliability optimization of series–parallel systems with mixed redundancy strategy in subsystems*, Reliab. Eng. Syst. Saf., vol. 13, pp. 132–139.
- [5] ervi, L. D., and Finn, S. G., (2002), *M/M/1 queues with working vacations (m/m/1/wv)*, Perform. Eval., vol. 50, no. 1, pp. 41–52.
- [6] euts, M. F. , (1994), *Matrix-geometric solutions in stochastic models: an algorithmic approach*. Courier Corporation.